不等式研究通讯

2003⑤

2003年10月1日

中国不等式研究小组主办

目 录

[解析不等式研究]

有关 $Gamma$ 函数的二个不等式

张小明
(浙江海宁电大 314400)

摘要: 关于此函数的凸性的研究是比较多的,[2] [4]曾研究了它的几何凸性,本文将继续它们的工作,得到了二个较漂亮的不等式.

关键词: $Gamma$ 函数,不等式,几何凸性

$Gamma$ 函数定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{(1+\frac{x}{n})}, \tag{1}$$

本文都在实数范围内讨论,要用到有关它的恒等式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad , \tag{2}$$

其中 $x>0$,又 $Gamma$ 函数在 $(0,a_0]$ 上递减,在 $[a_0,+\infty)$ 为递增（a_0 大约为 1.46），以上这一些都出自文献[1]．关于此函数的凸性的研究是比较多的,[2] [4]曾研究了它的几何凸性,本文将继续它们的工作,得到了二个较漂亮的不等式.

下面给出有关几何凸函数的定义.

定义 1 设 $f:I\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 上有定义且连续,如果存在自然数 $n\ge 2$,对于任一 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$, 和 $l_1,l_2,\cdots,l_n>0$, 满足 $l_1+l_2+\cdots+l_n=1$ 时,有

（i）$f(\sqrt{x_1x_2})\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$. (3)

（ii）$f(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n})\le f^{l_1}(x)f^{l_2}(x)\cdots f^{l_n}(x_n)$ (4)

之一成立,则称那么称 $f(x)$ 在 I 上是几何凸函数；若不等式之一反向,称 $f(x)$ 在 I 上是几何凹函数.

下引理１由[2][3]得到的,引理 2 为[4]的第二章定理 5.3．引理 3 为[4]的第二章定理 7.1.

引理１ 设 $(a,b)\subset(0,+\infty)$, $f:(a,b)\to(0,+\infty)$, f 为二阶可导.

（i）若有 $x[f(x)f''(x)-(f'(x))^2]+f(x)f'(x)\ge 0$, 则 f 为几何凸函数,反之亦然.

（ii）若有 $x[f(x)f''(x)-(f'(x))^2]+f(x)f'(x)\le 0$, 则 f 为几何凹函数,反之亦然.

引理 2 设函数项无穷乘积 $f(x)=\prod_{i=1}^{+\infty}f_i(x)$ 在 $I\subseteq[0,+\infty)$ 上收敛，且 f 为连续, $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 为几何凸（凹）函数,则 f 在 I 上也为几何凸（凹）函数.

引理3 $\Gamma(x)$ 在 $[\frac{1}{4},+\infty)$ 上为几何凸函数.

又[５]的第 390 页中指出, $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为对数凸函数,因此有以下这个重要的不等式.

引理４ 设 $x_i\in(0,+\infty)$,则有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i)} \ge \Gamma\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \tag{5}$$

成立.

定理１ 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, a_0 - 1)$, **则**

$$\prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i) \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\prod_{i=1}^{n}x_i}\Gamma^n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right).$$

证明 设 $y = 1 + x$ **,** $(\ln y)'' \le 0$, **故** $y = 1 + x$ **为对数凹的,有**

$$a_0 \ge 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)} \text{ .}$$

又有

$$\prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i) \overset{(6)}{=} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1+x_i) \overset{(7)}{\ge} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\Gamma^n\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right)$$

$$\overset{(8)}{\ge} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\Gamma^n\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right) \overset{(9)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\prod_{i=1}^{n}x_i}\Gamma^n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right),$$

其中(6)式和(9)式利用了(2)式,(7)利用引理 3 和(4)式的 $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = \frac{1}{n}$ **情形,(8)式利用** $Gamma$ **函数在** $(0, a_0]$ **上递减这个性质,命题得证.**

在定理１的条件下,定理的结果比经典的(5)式明显强.

定理２ **函数** $2^{-x}\Gamma(x)$ **在** $(0, \frac{1}{5})$ **上是几何凹函数.**

证明 **由于**

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}, \quad 2^{-x}(1+x)\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}},$$

设 $f_n(x) = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$ **,** $n \ge 2, x \in (0, \frac{1}{5})$ **,有**

$$\left(\frac{xf_n'(x)}{f(x)}\right)' = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{(n+x)^2} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{(n+\frac{1}{5})^2},$$

再设$g(t)=\ln(1+\frac{1}{t})-\frac{t}{(t+\frac{1}{5})^2},t\in[2,+\infty)$**，有**

$$g'(t)=-\frac{1}{t+t^2}+\frac{t-\frac{1}{5}}{(t+\frac{1}{5})^3}=\frac{25t^2-40t-1}{125(t+\frac{1}{5})^3(t+t^2)},$$

对于 $t\in[2,+\infty)$ **易知** $g'(t)\geq 0$ **，又有** $g(+\infty)=0$ **，所以** $g(n)\leq 0,\ (\frac{xf_n^{'}(x)}{f_n(x)})^{'}\leq 0$ **，其中** $n\geq 2,x\in(0,\frac{1}{5})$**．由本章引理１和引理２知**

$$2^{-x}(1+x)\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$$

为几何凹的,又$\frac{1}{1+x}$**在**$(0,\frac{1}{5})$ **上是几何凹的,所以有**$\frac{1}{1+x}2^{-x}(1+x)\Gamma(x)$ **为几何凹的,命题得证.**

定理３　设$x,y\in(0,\frac{1}{5})$ **,则**

$$\frac{(x+y)^2}{4xy}\Gamma^2(\frac{x+y}{2})\leq\Gamma(x)\Gamma(y)\leq 2^{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\Gamma^2(\sqrt{xy})$$

成立.

证明　与定理１的证明相同有

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\frac{1}{xy}\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)\geq\frac{1}{xy}\Gamma^2(\sqrt{(1+x)(1+y)}),$$

又易证

$$\sqrt{(1+x)(1+y)}\leq\frac{x+y}{2}+1\leq a_0,$$

所以有

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\geq\frac{1}{xy}\Gamma^2(\sqrt{(1+x)(1+y)})\geq\frac{1}{xy}\Gamma^2(\frac{x+y}{2}+1)=\frac{(x+y)^2}{4xy}\Gamma^2(\frac{x+y}{2}),$$

同时又由定理２有

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=2^{x+y}2^{-x}\Gamma(x)2^{-y}\Gamma(y)\leq 2^{x+y}2^{-2\sqrt{xy}}\Gamma^2(\sqrt{xy})=2^{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\Gamma^2(\sqrt{xy}),$$

至此定理得证.

参考文献

[1] 沈永欢等．实用数学手册．北京:科学出版社,1992(8):P653-654.
[2] Constantin P. Niculescu. Convexity According To The Geometric Mean. MIA.2000(2):155-167.
[3] 于小平． 谈广义凸函数． 第四届初数会.
[4] 张小明．几何凸函数的定义、性质及其应用．不等式研究通讯（2003 年增刊）,总第三十八期.
[5] 匡继昌．常用不等式（第二版）[M]．长沙:湖南科技出版社,1993（5）.

控制不等式定义的扩展

李世杰
(浙江省衢州市教育局教研室 324002)

众所周知,控制理论与凸函数结合后,在不等式研究中发挥了巨大的作用．如果我们能够将控制不等式的定义进行扩展,可能会带来惊人的结果．

通常的控制不等式定义是（实际上是"和"控,下面简称为原始定义）：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ ，x,y 表示 n 维欧氏空间 R^n 的点，其中 $x_i,y_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,n$，把 x,y 的分量按递减顺序重排后记作：$x_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$，$y_{\downarrow}=(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]})$．

若 x,y 满足

1) $\sum\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\le\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}(k=1,2,\cdots,n-1)$，

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_{[i]}$，

则称 x 被 y 所控制,记作 $x\prec y$．如果 $x\prec y$ 但非 y 的重排,则称 x 被 y 严格控制,记作:$x\prec\prec y$．

类似于上述"和控"的定义,笔者在 1999 年[1]提出"积控"的定义:

若分量都为正数的 $x,y\in R^n$,且满足

1) $\prod\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\le\prod\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$，

2) $\prod\limits_{i=1}^{n}x_{[i]}=\prod\limits_{i=1}^{n}y_{[i]}$，

则称 x 被 y 积控,记作 $x\prec y$ （积）．并得到了一系列的不等式[1],如:

定理 1 （积控不等式）设 $x,y\in R^n$,则 $x\prec y$ （积）的充要条件是对任意的几何凸函数 $g(x)$,都有

$$\prod_{i=1}^{n}g(x_i)\le\prod_{i=1}^{n}g(y_i)．$$

最近看了张小明先生的大作[6],方知在[2]、[3]中采用的是"对数控制"这一提法,它们是在"和控"的定义的基础上提出的,"对数控制"与"积控"二者本质上是一致的.

笔者下面再提出几种新的控制方式,它们扩展了控制不等式的原始定义．但限于水平,不妥之处难免,欢迎行家们批评指正:

一、复合控制定义

设 $f(x)$、$g(y)$ 是给定的两个函数,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,x,y 表示 n 维欧氏空间 R^n 的点，其中 $x_i,y_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,n$，把 x,y 的分量按递减顺序重排后记作:$x_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$,$y_{\downarrow}=(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]})$．若 x,y 的分量满足

1) $\sum\limits_{i=1}^{k}f(x_{[i]})\le\sum\limits_{i=1}^{k}g(y_{[i]})(k=1,2,\cdots,n-1)$，

2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_{[i]})=\sum_{i=1}^{n} g(y_{[i]})$,

则称 $f(x)$ 被 $g(y)$ 复合控制,记作 $f(x)\prec g(y)$.

复合控制的例子是大量存在的,如 $f(x)$ 、 $g(y)$ 相同的例子:

(1)**当 $f(x)=g(x)=kx+c$ 时**, $x\prec y\Leftrightarrow f(x)\prec g(y)$ **；特别地当 $k=1,c=0$ 时复合控制就变成“和控”的原始定义.**

(2) **当 $f(x)=g(x)=\ln x$ 时,称为“对数控制”或“积控”,参见文**[1]、[2]、[3]

$f(x)$ 、 $g(y)$ **不相同的例子**:

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(y)=\dfrac{1}{y}+1$, $x=(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{7})$, $y=(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4})$,**则**

$$f(x_1)=1\le g(y_1)=2,$$
$$f(x_1)+f(x_2)=4\le g(y_1)+g(y_2)=6,$$
$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=g(y_1)+g(y_2)+g(y_3)=11,$$

所以 $f(x)\prec g(y)$.

注:以上定义早在 2000 **年得到,因没有好的例子一直没有发表过.**

定理 2 **设** $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, x,y **表示** n **维欧氏空间** R^n **的点,其中** $x_i,y_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,n$,**若**

(1) $f(t)$, $g(t)$ ($t\in[a,b]$)**是给定的两个单调递增函数**:

$$x_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]}) ,\ y_{\downarrow}=(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]}),$$

表示 x,y 的分量是按递减顺序排列的；或 $f(t)$ 、 $g(t)$ ($t\in[a,b]$)是给定的两个单调递减函数, $x_{\uparrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$, $y_{\uparrow}=(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]})$,**表示 x,y 的分量是按递增顺序排列的.**

(2) x,y **的分量满足**

1) $\sum_{i=1}^{k} f(x_{[i]})\le\sum_{i=1}^{k} g(y_{[i]})(k=1,2,\cdots,n-1)$,

2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_{[i]})=\sum_{i=1}^{n} g(y_{[i]})$,

则（I）若 $j(t)$ 是凸函数,有 $\sum_{i=1}^{n} j[f(x_i)]\le\sum_{i=1}^{n} j[g(y_i)]$ 成立.

（II）若 $j(t)$ 是凹函数,有 $\sum_{i=1}^{n} j[f(x_i)]\le\sum_{i=1}^{n} j[g(y_i)]$ 成立.

证明 **由条件**(1)**实际上可推出 $f(x_1)\ge f(x_2)\ge\cdots\ge f(x_n)$, $g(y_1)\ge g(y_2)\ge\cdots\ge g(y_n)$,结合**(2),**由** Karamata **不等式**([6]P65 **定理** 5．4),**就可推出（I）（II）成立.**

问题 1 **是否存在其它的复合型的优美的控制不等式**?

二、加权控制定义

设 $x_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$, $y_{\downarrow}=(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]})$,**表示 x,y 的分量是按递减顺序排列的. 若 x,y 的分量满足**

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i x_{[i]}}{\sum_{i=1}^{k} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i y_{[i]}}{\sum_{i=1}^{k} b_i} \quad (k=1,2,\cdots,n-1),$$

和

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i y_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} b_i},$$

则称ax被$b\ y$加权控制,记作$ax \prec b\ y$.

注:笔者在 2002 年证明了关于$ax \prec\prec ay$的一个结论,下以$n=2$为例.

当 $n=2$ 时，由 $x_1 \leq y_1$ ，及 $a_1x_1 + a_2x_2 = a_1y_1 + a_2y_2$ ，容易推出 $y_2 \leq x_2$ ，所以 $y_2 \leq x_2 \leq x_1 \leq y_1$.

根据[4]中已证明的以下定理:

定理 3 设$f(x)$为区间M 上的凸函数,如果

(1) $x_i \in M(i=1,2,\cdots,m,m>1)$, $y_i \in M(i=1,2,\cdots,n,n>1)$,

(2) $x_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_m$,

(3) $a_i > 0(i=1,2,\cdots,m)$, $b_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$,且有$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$,

(4) $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} ß_i y_i$,

那么有不等式 $$\sum_{i=1}^{m} a_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} ß_i f(y_i)$$

成立. 而对$f(x)$为区间M 上的凹函数,上面的不等式要反向.

如$n=m=2$的特殊情况,即对凸函数$f(x)$,有

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \leq a_1 f(y_1) + a_2 f(y_2).$$

问题 2 是否存在$a\ x$与$b\ y(a \neq b)$之间的控制不等式?

三、加权复合控制定义

设$x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \cdots, x_{[n]})$, $y_{\downarrow} = (y_{[1]}, y_{[2]}, \cdots, y_{[n]})$,表示x, y 的分量是按递减顺序排列的. 若x, y 的分量满足

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i f(x_{[i]})}{\sum_{i=1}^{k} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i g(y_{[i]})}{\sum_{i=1}^{k} b_i} \quad (k=1,2,\cdots,n-1),$$

和

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_{[i]})}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i g(y_{[i]})}{\sum_{i=1}^{n} b_i},$$

则称 $af(x)$ 被 $bg(y)$ 加权复合控制,记作 $af(x) \prec bg(y)$.

四、其它控制定义

上面已有了和控、积控的定义,从逻辑上来说,还应该有差控、商控的定义,下面尝试给出.

"差控"定义:设 $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \cdots, x_{[n]})$, $y_{\downarrow} = (y_{[1]}, y_{[2]}, \cdots, y_{[n]})$,表示 x, y 的分量是按递减顺序排列的. 若 x, y 的分量满足

$$x_1 = y_1$$

和

$$0 < x_1 - \sum_{i=2}^{k} x_i \le y_1 - \sum_{i=2}^{k} y_i \, (k = 2,3,\cdots,n),$$

则称 x 被 y 差控,简记为 $x \prec y$ （差）.

"商控" 定义:设 $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \cdots, x_{[n]})$, $y_{\downarrow} = (y_{[1]}, y_{[2]}, \cdots, y_{[n]})$,表示 x, y 的分量是按递减顺序排列的. 若 x, y 的分量均为正,且满足

$$x_1 = y_1$$

和

$$1 < \frac{x_1}{\prod_{i=2}^{k} x_i} \le \frac{y_1}{\prod_{i=2}^{k} y_i} \quad (k = 2,3,\cdots,n),$$

则称 x 被 y 商控,简记为 $x \prec y$ （商）

问题 3 是否存在加权复合型、差控型、商控型的漂亮的控制不等式?

区间控制定义:

设 $a_1 \ge a_2 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge b_3 \ge b_4 \ge \cdots \ge a_{2n-1} \ge a_{2n} \ge b_{2n-1} \ge b_{2n}$, 和

$$x_i \in [a_{2i-1}, a_{2i}], i = 1,2,\cdots,n,$$

$$y_i \in [b_{2i-1}, b_{2i}], i = 1,2,\cdots,n,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$,则称 $x \prec y$ （区间控制）.

上述的 $x \prec y$ （区间控制）,一定是 $x \prec y$ （和）的,但扩展到非对称区间,如一个区间内不止一个分量时,区间控制的定义怎么下,值得探索.定理 3 中的不等式似乎可看作分三个区间 $[x_1, x_k],[y_1, y_m],[x_{k+1}, x_n]$ 实施的一个控制不等式.

问题 4 是否存在 a x 与 b y $(a \ne b)$ 型的区间控制不等式?

上面所举的控制不等式大多是"对称控制"的,寻找"非对称控制"似乎非常困难,定理 3 是非对称的简单一例.

现在已证明的控制不等式基本上属于"点控"方式,能否拓展到线（或块）控上. 如 $x_1 \ge y_1 \ge x_2 \ge y_2 \ge x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2$,增加什么条件, 对任意的凸(凹)函数 $f(x)$ 或几何凸(凹)函数,有

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \ge (\le) f(y_1) + f(y_2).$$

但觉得很困难,望有志者在此方面进行一些探索,也许一些有价值的定理在其中.

感谢张小明老师对我粗糙的第一稿进行修改.

张小明的注:(1)李世杰老师遵循科学研究的一般规律,很有可能在做一件有意义的工作,也许还不成熟,但许多真理一开始都是不明显的,为此我建议此文在这里发表,供大家研究.

(2)此处参考文献[1]的作者与正式发表的作者不符,其中的原由不便在这里争论,此处以投稿为准.

参考文献

[1] **李世杰．几何凸函数的若干性质**[J] ．**数学通讯**,2003 **年第** 5 **期．**

[2] **杨定华．有关积凸函数的一个不等式**,(**不等式研究**(M))(**杨学枝主编**) ．**西藏人民出版社**,2000(6):71-74．

[3] Onstantin Pniculescu．Convexity According To The Geometric Mean． MIA. ,2000(2):155-167．

[4] **李世杰．凸函数** Jensen **不等式的一个推广及应用**[J] ．**江西**:**抚州师专学报**,1988 **年第** 3 **期**,P30—37．

[5] **李世杰．广义凸函数定义与性质之我见**[J] ．**中学数学**,1999 **年第** 5 **期．**

[6] **张小明．不等式研究通讯**(**几何凸函数专辑**) ．2003 **年** 8 **月．**

几何凸函数的几个积分不等式

张小明

(浙江海宁电大 314400)

定义 1 设函数 f **为** $[a,b]$ **上的连续函数,下记为** $f\in C_{[a,b]}$ **,若满足对于任** $x_i\in[a,b],\ l_i\geq 0, i=1,2,\cdots n$ **,且** $\sum\limits_{i=1}^{n} l_i=1$ **,有以下之一成立,**

$$\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\geq f(\sqrt{x_1x_2}),\tag{1}$$

或

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}\geq f(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}),\tag{2}$$

或

$$\prod_{i=1}^{n} f^{l_i}(x_i)\geq f(\prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}),\tag{3}$$

则称 f **在** $[a,b]$ **上为几何凸函数,若（1）、（2）和（3）式之一不等号反向,则称** f **在** $[a,b]$ **上为几何凹函数.**

为了记叙上的方便,下记 $\Delta=b-a$ **.**

引理 1 **设** $0<a<b$ **,** $a_n(i)=(a+\frac{i}{n}\Delta), i=1,2\cdots n$ **,则对于满足文[2]第四章引理 5.2 的** k_0 **（这里记为** k_n **）,有**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n}=\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}.$$

证明 根据 k_n **的定义有**

$$a^{n-k_n}b^{k_n}\leq\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)<a^{n-k_n-1}b^{k_n+1},$$

$$(\frac{b}{a})^{k_n}\leq\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})<(\frac{b}{a})^{k_n+1},$$

$$k_n \le \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})) < k_n + 1,$$

所以 k_n 取 $\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))$ 的整数部分．设 f 在 $[a,b]$ 最大值为 M ，有

$$\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))-1 < k_n \le \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})),$$

$$\frac{1}{n}[\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))-1] < \frac{k_n}{n} \le \frac{1}{n}\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})),$$

$$\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n} < \frac{k_n}{n} \le \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{\frac{b}{a}}\frac{1}{a}(\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta))^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n} < \frac{k_n}{n} \le \log_{\frac{b}{a}}\frac{1}{a}(\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta))^{\frac{1}{n}}$$

由极限的夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n} = \log_{\frac{b}{a}}(\frac{1}{ae}\cdot b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}) = \frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a},$$

引理得证．

定理１ 设函数 $f \in C_{[a,b]}$ 为几何凸函数,则

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{b-a}[(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a})f(a)+(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a})f(b)],$$

成立．

证明 根据文[2]中的第三章的推论 4.2,知 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 为 $[a,b]^n$ 上几何凸函数,又由文[2]的第四章的引理 5.2,及第三章的定理 5.3,有:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}\Delta) \le (n-k_n-1)f(a)+k_n f(b)+f(\frac{\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)}{a^{n-k_n-1}b^{k_n}})$$

$$\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}\Delta) \le \Delta[\frac{n-k_n-1}{n}f(a)+\frac{k_n}{n}f(b)+\frac{M}{n}]$$

至此有:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}\Delta) \le \lim_{n\to+\infty}\Delta[\frac{n-k_n-1}{n}f(a)+\frac{k_n}{n}f(b)+\frac{M}{n}]$$

$$=(b-a)[(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a})f(a)+(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a})f(b)],$$

定理１得证．

又从[3]中知,对于几何凸函数 $f \in C_{[a,b]}$ 有

$$f(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}})\le\exp[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\ln x)dx]\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

成立,其中$\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}$为$a,b$的指数平均（见[1]第 41 页）,所以有以下定理.

定理２　对于几何凸函数$f\in C_{[a,b]}$有

$$f(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}})\le\exp[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\ln x)dx]\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\le(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a})f(a)+(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a})f(b)\,, \qquad (4)$$

若设f 为凸函数,则[1]中的 P386 有

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (5)$$

成立,如果用这个结果和文[2]的第二章的定理３．１平推一下,是得不到定理２的．当 f 既为凸函数又为几何凸函数时,（4）式与（5）式谁强呢？这不难用在$[1,e]$上的函数$f(x)=x^2$和$g(x)=\frac{1}{x^2}$两者来验证,可以发现（4）式与（5）式各有强弱.

定理３　设$z=f(x,y)$为$D=[a,b]\times[c,d]$上的几何凸函数,则

$$f(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}},\frac{1}{e}d^{\frac{d}{d-c}}c^{\frac{c}{c-d}})\le\frac{1}{(b-a)(c-d)}\iint_D f(x,y)ds$$

成立.

由定理２易证定理３.

定理４　设函数f 为$[a,b]$上的几何凸函数,$p(x)\ge0,x\in[a,b]$,且$\int_a^b p(x)dx=1$,对于f 的加权几何平均,有以下不等式成立,

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)\ge f[\exp(\int_a^b p(x)\ln x\cdot dx)].$$

证明 由[3]**的性质** 1 **有**:

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)=\exp(\int_a^b\frac{1}{\Delta}\ln f(x)^{\Delta p(x)}dx)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f^{\Delta p(a+\frac{i}{n}\Delta)}(a+\frac{i}{n}\Delta)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}[\prod_{i=1}^{n} f^{\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}(a+\frac{i}{n}\Delta)]^{\frac{\Delta\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{n}},$$

由定义 1 **的（**3**）式进而有**

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)\ge\lim_{n\to+\infty}\{f[\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)^{\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}]\}^{\frac{\Delta\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\{f[\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)^{\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}]\}^{\int_a^b p(x)dx}=f[\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)^{\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}]$$

$$=f\{\lim_{n\to+\infty}[\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}\Delta)^{\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{n}}]^{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}\}=f[(\exp\frac{1}{\Delta}\int_a^b\ln x^{p(x)}dx)^{\frac{\Delta}{\int_a^b p(x)dx}}]$$

$$=f(\exp\int_a^b\ln x^{p(x)}dx).$$

所以有$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)\ge f[\exp(\int_a^b p(x)\ln x\cdot dx)]$成立.

定理４推广了[3]定理３,其实当$p(x)=\dfrac{1}{b-a}$时,就是定理３.

参考文献

[1]匡继昌．常用不等式（第二版）[M]．长沙:湖南科技出版社,1993（5）.
[2]张小明．几何凸函数的定义、性质及其应用．不等式研究通讯,2003（几何凸函数）增刊.
[3]张小明,杨定华．有关几何凸函数的几何平均不等式．中国不等式研究小组网站《论文选读》第 163 篇.

几何凸函数的若干新性质

李世杰
（衢州市教育局教研室,浙江 324002）

几何凸函数定义　设$f(x)$是D（非负实数集）上的正值函数,且对$x_i\in$D（i=1,2,⋯,n）,都有

$$f(\sqrt{x_1x_2})\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\qquad(1)$$

则称$f(x)$是D上的几何凸函数；如果（1）中不等号反向,则称$f(x)$是D上的几何凹函数.

最近一段时间反复看了张小明先生的大作[1],很受启发.下面把自己的一点心得整理出来,供大家参考.

定理 1　（几何凸函数的一个生成定理）设$f(x)$是$(a,b)\subseteq R^+$上的几何凸（或凹）函数,$ag\neq0,\ c,d,ß\in R^+$,则$F(x)=cx^a f^b(dx^g)$是$((\frac{a}{d})^{\frac{1}{g}},(\frac{b}{d})^{\frac{1}{g}})$上的几何凸（或凹）函数.

证明　令$y=dx^g$,则x,y是$((\frac{a}{d})^{\frac{1}{g}},(\frac{b}{d})^{\frac{1}{g}})$到$(a,b)$的一一对应.

$$f(\sqrt{y_1y_2})\le\sqrt{f(y_1)f(y_2)}\Leftrightarrow f(\sqrt{dx_1^g\cdot dx_2^g})\le\sqrt{f(dx_1^g)f(dx_2^g)}$$

$$\Leftrightarrow F(\sqrt{x_1x_2})\le\sqrt{F(x_1)F(x_2)}$$

由此可知,定理１结论成立.

实际上从证明过程看这里的条件是充分必要的.

推论 在$(0,+\infty)$上$F(x)$和$f(x)$具有相同的几何凸性.

有了这些结果,我们可很方便地从一个已知的几何凸（或凹）函数出发,推出一些新的几何凸（或凹）函数.

如:张小明先生在[1]中证明了 $f(x)=1+x-x^2+x^3+x^4$ 在$(0,+\infty)$ 上是几何凸函数,由推论知 $\sqrt{x}f(x)$和$x^{2003}f(x)$也是$(0,+\infty)$上的几何凸函数.

对于一元n次多项式函数在$(0,+\infty)$上的几何凹性,杨路教授率先证明了:一元三次多项式函数,常数项不为零时,在$(0,+\infty)$上不可能是几何凹的. 随后笔者获得了如下结果:

定理2 n次多项式函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ($a_n\neq 0$,且$f(x)$不是单项式）不是区间$[0,+\infty)$上的几何凹函数.

证明 如果 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$ 上的几何凹函数,由定义,知 $f(x)$ 是正值函数,故有 $a_n>0$, $a_0=f(0)>0$,对任意的$x_1\geq 0, x_2\geq 0$,恒有

$$f(\sqrt{x_1x_2})\geq\sqrt{f(x_1)f(x_2)} \tag{2}$$

在（2）中取$x_2=0$,得$a_0^2=f^2(0)\geq a_0f(x_1)$,即

$$x_1(a_1+a_2x_1+a_3x_1^2+\cdots+a_nx_1^{n-1})\leq 0 \tag{3}$$

（3）式对$x_1\geq 0$恒成立,由x_1取值的任意性当$x_1\to+\infty$时,知$a_n<0$,与前述$a_n>0$矛盾.所以$f(x)$不是区间$[0,+\infty)$上的几何凹函数.

注 如果区间$[0,+\infty)$改为开区间$(0,+\infty)$,当$a_0\neq 0$时结论仍成立.只须将上述证明进行修改,将"在（2）中取$x_2=0$"改为"在（2）中取$x_2\to 0$"即可. 当$a_0=0$时, $f(x)=x^kg(x)$, $k\in N_+$, $g(0)\neq 0$, 如果$g(x)$不是常数函数(相当于$f(x)$不是单项式）,根据定理 1 推论, $f(x)$和$g(x)$具有相同的几何凸性,由刚刚证明的$a_0\neq 0$的结论, 此时$f(x)$不是区间$(0,+\infty)$上的几何凹函数

问题 1 多项式函数 $f(x)$ 不是区间$[0,+\infty)$ 上的几何凹函数,那么在其它类型的区间$(0,a)$,(a,b),$(a,+\infty)$上$f(x)$能成为几何凹函数吗?

2003年8月初先得到了以下有趣的结果(李世杰提出,张小明证明):

设函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $a_0\neq 0$, $a_2\neq 0$, 若 f 在$(0,q]$和$[q,+\infty)$分别是几何凹的,则 $a_0>0, a_2>0, a_1=-2\sqrt{a_0a_2}$ 且$q=\sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$.

8 月中旬,笔者总结出可具体操作的求解步骤,彻底解决了一元二次函数几何凸性的判别问题,并对一元三次函数几何凸性的判别作了初步研究[7].但四次（或四次以上）的多项式函数的几何凸性的判别仍然没有解决.在探索的过程中笔者又得到了如下的一些结果:

定理3 设n次多项式函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ($a_n\neq 0$,且$f(x)$不是单项式)是区间$[0,a)$上的几何凸(或凹)函数,则$a_0>0, a_1\geq 0$ （或$a_0>0, a_1\leq 0$）.

证明 与定理 2 的证明完全类似, 由定义知$f(x)$是正值函数,故$a_0=f(0)>0$,在(3)中$x_1\neq 0$时,有

$$a_1+a_2x_1+a_3x_1^2+\cdots+a_nx_1^{n-1}\geq(\leq)0$$

令$x_1\to 0$,即得$a_1\geq(\leq)0$.

注 如$a_1=0$, 从证明过程可推知$a_2\geq(\leq)0$,依此类推,结论:下标第二小的系数≥(≤)0.

定理4 设n次多项式函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ($a_n\neq 0$,且$f(x)$不是单项式）是区间$[a,+\infty)$上的几何凸(或凹)函数,则$a_n>0, a_{n-1}\geq 0$ （或$a_n>0, a_{n-1}\leq 0$）.

证明 如果$f(x)$是区间$[a,+\infty)$上的几何凸(或凹)函数,由定义知 $f(x)$是正值函数,故$a_n>0$,对任意的$x_1\geq a, x_2\geq a$,恒有

$$f\left(\sqrt{x_1x_2}\right)\le(\ge)\sqrt{f(x_1)f(x_2)} \qquad (4)$$

在(4)两边同时除以$\sqrt{x_2^n}$,并令$x_2\to+\infty$,变形得

$f(x_1)a_n\ge(\le)a_n^2x_1^n$,推出$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}\ge(\le)0$

由x_1取值的任意性知$a_{n-1}\ge(\le)0$.

注 如果$a_{n-1}=0$, 从上述证明过程可推知$a_{n-2}\ge(\le)0$,依此类推,结论:下标第二大的系数≥(≤)0.

推论 n 次多项式函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ($a_n\ne0, n\ge4$,且$f(x)$ 不是单项式)是区间$[0,+\infty)$ 上的几何凸(或凹)函数的一个必要条件是$a_n>0, a_{n-1}\ge0$, $a_1\ge0, a_0>0$ （或$a_n>0, a_{n-1}\le0$, $a_1\le0, a_0>0$）.

定理 5 四项多项式函数

$$f(x)=a_0x^s+a_1x^t+a_2x^m+a_3x^n\ (n,m,t,s\in N,\ n>m>t>s\ge0, a_i\ne0, i=1,2,3,4)$$

为区间D上的几何凸函数的充分必要条件是$a_3>0, a_2>0$, $a_1>0, a_0>0$.这里区间D:当s=0时为$[0,+\infty)$,当s>0时为$(0,+\infty)$.

证明 必要性:根据定理1,只要证$s=0$ 的情形.由定理3、定理4后的注及推论,易知结论为真

充分性利用chuchy不等式$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\ge(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$,

$$\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\ge\sqrt{\left(\sqrt{a_0x_1^s\cdot a_0x_2^s}+\sqrt{a_1x_1^t\cdot a_1x_2^t}+\sqrt{a_2x_1^m\cdot a_2x_2^m}+\sqrt{a_3x_1^n\cdot a_3x_2^n}\right)^2}$$

$$\ge a_0(\sqrt{x_1x_2})^s+a_1(\sqrt{x_1x_2})^t+a_2(\sqrt{x_1x_2})^m+a_3(\sqrt{x_1x_2})^n=f(\sqrt{x_1x_2})$$,结论成立.

问题 2 五项多项式函数

$f(x)=a_0x^s+a_1x^t+a_2x^m+a_3x^n+a_4x^p\ (p,n,m,t,s\in N,\ p>n>m>t>s\ge0,\ a_i\ne0, i=1,2,3,4,5)$ 为区间 D 上的几何凸函数时$a_4>0, a_3>0$, $a_1>0, a_0>0$,问:a_2 可取那些负实数值? 这里区间D:当s=0时为$[0,+\infty)$,当s>0时为$(0,+\infty)$.

参考文献

[1]张小明．不等式研究通讯(几何凸函数专辑)．2003年8月．
[2]李世杰．几何凸函数的若干性质[J]．数学通讯,2003年第5期．
[3]杨定华．有关积凸函数的一个不等式,(不等式研究(M))(杨学枝主编)．西藏人民出版社,2000(6):71-74．
[4]Constantin Pniculescu. Convexity According To The Geometric Mean．MIA.,2000(2):155-167．
[5]李世杰．凸函数Jensen不等式的一个推广及应用[J]．江西:抚州师专学报（自然科学版）,1988年第3期,P30—37．
[6]李世杰．广义凸函数定义与性质之我见[J]．中学数学,1999年第5期．
[7]李世杰. 一元二次和三次函数几何凸性的判别,中国不等式研究小组网站(http://zgbdsyjxz.nease.net) 几何凸函数专栏2003.8.14.

由一个不等式想到的…

郑天泉
(浙江省三门中学 317100)

已知$a,b\in R^+$, 求证: $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}\ge1$ ………………………………①

(<<数学通报>>2003.5 数学问题 1435.)

已知$a,b\in R^{+}$,**求证**: $\dfrac{8}{8+ab}\le\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le\dfrac{2+8ab}{1+8ab}$ ……………………②

(**首都师大**<<**中学生数学**>>1996.12 **及** 1997.1 **期** <**课外练习**>**栏**)

第一个等号当且仅当 a=b=2 **时取得**; **第二个等号当且仅当** a=b=$\dfrac{1}{2}$ **时取得**.

②**的证明**: **第一个不等式**$\dfrac{8}{8+ab}\le\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$ **笔者在**<<**中学生数学**>>1996.12 .<**课外练习**>**栏已证**.

$\because \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}\ge\dfrac{8}{8+\dfrac{1}{ab}}=\dfrac{8ab}{1+8ab}$. **等号当且仅当**$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$=2 **时取得**.

$\therefore 1-\dfrac{1}{1+a}+1-\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{8ab}{1+8ab}$, $\therefore \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le 2-\dfrac{8ab}{1+8ab}=\dfrac{2+8ab}{1+8ab}$.

由此我们得到:

已知$a,b\in R^{+}$, **则**: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b}}\le\sqrt{2\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\right)}\le\sqrt{2\left(\dfrac{2+8ab}{1+8ab}\right)}$. ……...③

当且仅当 a=b=$\dfrac{1}{2}$ **时取得等号**.

$$\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}<\sqrt{2\left(\frac{2+8\times 9}{1+8\times 9}\right)}=\sqrt{\frac{148}{73}}=2\sqrt{\frac{37}{73}}\ \text{………………...④}$$

这样我们得到①**的一个上界估计**.

对于三个正数的情形我们有:

已知 $a,b,c\in R^{+}$, **则**:

$$(\text{I})\quad \frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\ge\frac{3}{4}\text{…………………....⑤}$$

$$(\text{II})\quad \frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+c}+\frac{c}{3c+a}\le\frac{3}{4}\text{……………………..⑥}$$

$$(\text{III})\quad \sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+c}}+\sqrt{\frac{c}{3c+a}}\le\frac{3}{2}.\text{…………….⑦}$$

等号当且仅当 a=b=c **时取得**.

证明:(Ⅰ)**左式**=$\dfrac{a^2}{a^2+3ab}+\dfrac{b^2}{b^2+3bc}+\dfrac{c^2}{c^2+3ca}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$

$=1-\dfrac{1}{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+3}\ge 1-\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{3}{4}$. **等号当且仅当** a=b=c **时取得**.

(Ⅱ) **由** $3\left(\dfrac{a}{3a+b}+\dfrac{b}{3b+c}+\dfrac{c}{3c+a}\right)=3-\left(\dfrac{b}{3a+b}+\dfrac{c}{3b+c}+\dfrac{a}{3c+a}\right)$

$\le 3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$. **即得**.

(III) $\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+c}}+\sqrt{\frac{c}{3c+a}}\le\sqrt{3(\frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+c}+\frac{c}{3c+a})}\le\frac{3}{2}$.

进而我们得到如下猜想:

已知 $x_i\in R^+$, ($i=1$、2、3、……、n).

则: (1) $\frac{x_1}{x_1+nx_2}+\frac{x_2}{x_2+nx_3}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_n+nx_1}\ge\frac{n}{n+1}$.

(2) $\frac{x_1}{nx_1+x_2}+\frac{x_2}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{nx_n+x_1}\le\frac{n}{n+1}$.

(3) $\sqrt{\frac{x_1}{nx_1+x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{nx_2+x_3}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{x_n}{nx_n+x_1}}\le\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

(4) $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\ge\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

(5) $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\le n-\frac{n^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}{1+n^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}$.

请读者给出证明.

[注]:（i）这五个猜想(不等式)之间的因果关系

$$(4)\Rightarrow\begin{cases}\Rightarrow(5);\\ \Rightarrow(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3).\end{cases}$$

事实上,例如 $(4)\Rightarrow(1)$: $\frac{x_1}{x_1+nx_2}+\frac{x_2}{x_2+nx_3}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_n+nx_1}$

$$=\frac{1}{1+n\frac{x_2}{x_1}}+\frac{1}{1+n\frac{x_3}{x_2}}+\cdots+\frac{1}{1+n\frac{x_1}{x_n}}\ge\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+n^n\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_1}{x_n}}=\frac{n}{n+1}.$$

$(4)\Rightarrow(5)$: $n-(\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n})=\frac{x_1}{1+x_1}+\cdots\frac{x_n}{1+x_n}$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{x_n}}\ge\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}=\frac{n^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}{1+n^{n+1}x_1x_2\cdots x_n}.$$

$(1)\Rightarrow(2)$:

$$n(\frac{x_1}{nx_1+x_2}+\frac{x_2}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{nx_n+x_1})=n-(\frac{x_2}{nx_1+x_2}+\frac{x_3}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_1}{nx_n+x_1})$$

$$=n-(\frac{1}{1+n\frac{x_1}{x_2}}+\cdots+\frac{1}{1+n\frac{x_n}{x_1}})\le n-\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+n^n}=\frac{n^2}{1+n}.$$

（ii）猜想(4)<即不等式(4)>笔者已在<<一道 IMO 试题的引伸>>一文中给出了证明.

（iii）（数学问题与解答）第 600 题《数学教学》 华东师大 2003-10，11 两期

[几何不等式研究]

关于“双胞胎”母子三角形面积不等式问题的探讨

湖北省黄石二中 杨志明 435003

厦门九中的陈四川老师在第五届初等数学学术交流会上提出如下悬奖征解:(奖金贰仟元(2000 元))

“双胞胎”母子三角形面积不等式题:

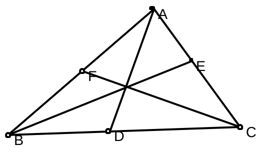
在△ABC 中, D 为 BC 边上的定点, $\frac{BD}{DC}=m\in R^{+}$ 为定值),G 为 AD 上(不含 A、D) 上的点,BG、CG 的延长线分别交 AC、AB 于 E、F, 求不等式:

$(S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})\le kS_{\Delta ABC}$,其中 k 的确值.

(用含 m 的表达式表示，且不能是近似数)

据陈老师讲:“本人发现此题已十年,未能解出.其间请教了许多名师均未果.”

今探讨发现,k 的确值存在，但 $k_{\min}$ 无法用含 m 的表达式表示.具体探讨如下.



解 如图,

$\frac{BD}{DC}=m\in R^{+}$ 为定值,令 $\frac{CE}{EA}=n,\frac{AF}{FB}=p(n,p\in R^{+})$.

由塞瓦定理知 $m\cdot n\cdot p=1$.

BGE 为△ADC 的截线，由梅涅劳斯定理知

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DB}{BC}=1,\frac{DB}{BC}=\frac{m}{m+1},n\cdot\frac{AG}{GD}\cdot\frac{m}{m+1}=1,\frac{AG}{GD}=\frac{m}{m+1},\frac{AG}{AD}=\frac{m+1}{mn+m+1}$$

$$\frac{FB}{AB}=\frac{1}{p+1},\frac{CE}{AC}=\frac{n}{n+1},\frac{DC}{BC}=\frac{1}{m+1}$$

$$S_{\Delta BGF}=\frac{FB}{AB}S_{\Delta ABG}=\frac{FB}{AB}\cdot\frac{AG}{AD}S_{\Delta ABD}=\frac{FB}{AB}\cdot\frac{AG}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{m+1}{mn+m+1}\cdot\frac{m}{m+1}S_{\Delta ABC}=\frac{m^{2}n}{(mn+1)(mn+m+1)}S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta CGE}=\frac{CE}{AC}S_{\Delta ACG}=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{AG}{AD}S_{\Delta ADC}=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{AG}{AD}\cdot\frac{DC}{BC}S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{m+1}{mn+m+1}\cdot\frac{1}{m+1}S_{\Delta ABC}=\frac{n}{(n+1)(mn+m+1)}S_{\Delta ABC}$$

$$(S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})=\frac{m^{2}n}{(mn+1)(mn+m+1)}S_{\Delta ABC}+\frac{n}{(n+1)(mn+m+1)}S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{n[(m^{2}+m)n+m^{2}+1]}{(mn+1)(n+1)(mn+m+1)}S_{\Delta ABC}$$

$\because (S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})\le kS_{\Delta ABC}$

$\therefore \dfrac{n[(m^2+m)n+m^2+1]}{(mn+1)(n+1)(mn+m+1)}\le k$

$\{\dfrac{n[(m^2+m)n+m^2+1]}{(mn+1)(n+1)(mn+m+1)}\}_{\max}\le k_{\min}$

$$\frac{n[(m^2+m)n+m^2+1]}{(mn+1)(n+1)(mn+m+1)}=\cfrac{1}{\dfrac{mn}{m+1}+\dfrac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}+\cfrac{\dfrac{m(m^2+6m+1)n}{(m+1)^2}+m+1}{n[(m^2+m)n+m^2+1]}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{mn}{m+1}+\dfrac{m(m^2+6m+1)}{[(m^2+m)n+m^2+1](m+1)^2}+\dfrac{m+1}{n[(m^2+m)n+m^2+1]}+\dfrac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{f(n)+\dfrac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}}$$

(其中 $f(n)=\dfrac{mn}{m+1}+\dfrac{m(m^2+6m+1)}{[(m^2+m)n+m^2+1](m+1)^2}+\dfrac{m+1}{n[(m^2+m)n+m^2+1]}$ **)**

$$\{\frac{n[(m^2+m)n+m^2+1]}{(mn+1)(n+1)(mn+m+1)}\}_{\max}=\frac{1}{f(n)_{\min}+\dfrac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}}\ (\because f(n)>0)$$

$f'(n)=[(m^4+m^3)n^4+(2m^4+2m^2)n^3+(m^4-2m^3-2m^2+m)n^2-(2m^3+4m^2$

$+2m)n^2-(m^3+m^2+m+1)]/\{n^2[(m^2+m)n+m^2+1)]^2\}$

$f''(n)=[(2m^5+12m^4+2m^3)n^3+(6m^6+18m^4+18m^2+6m^2)n^2+(6m^5+12m^4+12m^3$

$+12m^2+6m)n+2m^5+2m^4+2m^3+4m^2+2m+2)n]/\{n^3[(m^2+m)n+m^2+1)]^3\}>0$

$\therefore f'(n)$ **是**$n\in(0,+\infty)$ **上的单调增函数.**

$\lim\limits_{n\to0}f'(n)=\lim\limits_{n\to0}[(m^4+m^3)n^4+(2m^4+2m^2)n^3+(m^4-2m^3-2m^2+m)n^2-(2m^3+4m^2$

$+2m)n^2-(m^3+m^2+m+1)]/\lim\limits_{n\to0}\{n^2[(m^2+m)n+m^2+1)]^2\}=-\dfrac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}f'(n)=\lim\limits_{n\to\infty}[(m^4+m^3)n^4+(2m^4+2m^2)n^3+(m^4-2m^3-2m^2+m)n^2$

$-(2m^3+4m^2+2m)n^2-(m^3+m^2+m+1)]/\{n^2[(m^2+m)n+m^2+1)]^2\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{1}{m})n^4+(2+\dfrac{2}{m^2})n^3+(1-\dfrac{2}{m}-\dfrac{2}{m^2}+\dfrac{1}{m^3})n^2-(\dfrac{2}{m}+\dfrac{4}{m^2}+\dfrac{2}{m^3})n-(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}$

$+\dfrac{1}{m^3}+\dfrac{1}{m^4})]/\{n^2[(1+\dfrac{1}{m})n+1+\dfrac{1}{m^2}]^2\}=\dfrac{n^4+2n^3+n^2}{n^2(n+1)^2}=1$

$\because f'(n)$ **是**$n\in(0,+\infty)$ **上的单调增且连的函数，且**

$\lim\limits_{n\to0}f'(n)=-\dfrac{1}{n^2}<0,\lim\limits_{n\to\infty}f'(n)=1>0$

$\therefore f'(n)=0$ 在$n\in(0,+\infty)$ 上有唯一正根n_0 .

又$\because f''(n)>0, n\in(0,+\infty)$

$\therefore f(n)$ 在$n\in(0,+\infty)$ 有最小值$f(n_0)$.

令 $f'(n)=0$ 得

$$(m^4+m^3)n^4+(2m^4+2m^2)n^3+(m^4-2m^3-2m^2+m)n^2-(2m^3+4m^2+2m)n^2-(m^3+m^2+m+1)=0 \quad (1)$$

由于方程(1) 是含参数m关于n的一元四次方程，故无法用含有m的式子表示方程(1) 的根. 因而$k_{\min}$无法用含 m 的表达式表示.因此，陈四川老师提出的要求是不合理的.下面给出当 m($m\in R^+$)为某一特定值求方程(1) 的根的统一求解过程.

$$n^4+\frac{2(m^2+1)}{m(m+1)}n^3+\frac{m^2-3m+1}{m^2}n^2-\frac{2(m+1)}{m^2}n-\frac{m^2+1}{m^3}=0$$

令$p=\frac{2(m^2+1)}{m(m+1)}, q=\frac{m^2-3m+1}{m^2}, r=-\frac{2(m+1)}{m^2}, s=-\frac{m^2+1}{m^3}$,则

$$n^4+pn^3+qn^2+rn+s=0 \quad (2)$$

下面用裴那里法解(2).

(2)式等价于

$$n^4+pn^3+(q+a)n^2+(r+b)n+(s+c)=an^2+bn+c$$

右边限制$b^2=4ac$,令左边为$(n^2+\frac{p}{2}n+t)^2$,即

$$n^4+pn^3+(q+a)n^2+(r+b)n+(s+c)=(n^2+\frac{p}{2}n+t)^2$$
$$=n^4+pn^3+(2t+\frac{p^2}{4})n^2+ptn+t^2 \quad (3)$$

则 $\begin{cases}2t+\dfrac{p^2}{4}=q+a\\ pt=r+b\\ t^2=s+c\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=2t+\dfrac{p^2}{4}-q\\ b=pt-r\\ c=t^2-s\end{cases}$

代入$b^2=4ac$,即

$$8t^3-4qt^2+2(pr-4s)t-(p^2-4q)s-r^2=0 \quad (4)$$

下面用公式法解(4).

(4) 式等价于

$$t^3-\frac{q}{2}t^2+\frac{pr-4s}{4}t-\frac{(p^2-4q)s-r^2}{8}=0 \quad (5)$$

令$b_1=-\frac{q}{2}=-\frac{m^2-3m+1}{2m^2}, c_1=\frac{pr-4s}{4}=0, d_1=-\frac{(p^2-4q)s-r^2}{8}=\frac{(m-1)^2}{m^3(m+1)^2}$ ，则

$$t^3+b_1t^2+d_1=0 \quad (6)$$

在(6) 式中,令$t=h-s$ 得

$$h^3+(b_1-s)h^2+(3s^2-2b_1s)h-s^3+b_1s+d_1=0 \quad (7)$$

在(7) 式中,令 $s=\frac{b_1}{3}$ **得**

$$h^3-\frac{b_1^2}{3}h+\frac{2b_1^3}{27}+d_1=0 \tag{8}$$

令 $p_1=-\frac{b_1^2}{3}=-\frac{(3m^2-3m+1)^2}{12m^4}$

$q_1=\frac{2b_1^3}{27}+d_1=-\frac{m^8-7m^7+13m^6-102m^5+186m^4-102m^3+13m^2-7m+1}{108m^6(m+1)^2}$ **则**

$$h^3+p_1h+q_1=0 \tag{9}$$

$$\frac{q_1^2}{4}+\frac{p_1^3}{27}=\frac{1}{4}[-\frac{m^8-7m^7+13m^6-102m^5+186m^4-102m^3+13m^2-7m+1}{108m^6(m+1)^2}]^2$$

$$+\frac{1}{27}[-\frac{(3m^2-3m+1)^2}{12m^4}]^3$$

$$=-\frac{m^{10}-9m^9+28m^8-81m^7+187m^6-252m^5+187m^4-81m^3+28m^2-9m+1}{216m^9(m+1)^4}$$

$$=-\frac{(m-1)^2(m^2-6m+1)(m^6-m^5+6m^4-11m^3+6m^2-m+1)}{216m^9(m+1)^4}$$

$$=-\frac{(m-1)^2(m^2-6m+1)[(m-1)^2(m^4+m^3+7m^2+m+1)+m^3]}{216m^9(m+1)^4}$$

(I) 当 $m>3+2\sqrt{2}$ **或** $0<m<3-2\sqrt{2}$ **时，** $\frac{q_1^2}{4}+\frac{p_1^3}{27}>0$ **,方程(9) 有一实根和一对共轭虚根;**

(II) 当 $m=3+2\sqrt{2}$ **或** $m=1$ **或** $m=3-2\sqrt{2}$ **时，** $\frac{q_1^2}{4}+\frac{p_1^3}{27}=0$ **,方程(9) 有一单实根及一个二重实根;**

(III) 当 $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$ **时，** $\frac{q_1^2}{4}+\frac{p_1^3}{27}<0$ **,方程(9) 有三个不同的实根.**

由此可知，方程(9) 总有实根，当给定一个 m 值就可以求出方程(9) 的实根 h_0 **，进而得到方程(4)的根** t_0 **,将** t_0 **代入(3) 式.由与(2) 等价的(3) 式得**

$$n^2+\frac{p}{2}n+t_0=\pm(\sqrt{a}n+\frac{b}{2\sqrt{a}})=\pm(\sqrt{2t_0+\frac{p^2}{4}-q}\,n+\frac{pt_0-r}{2\sqrt{2t_0+\frac{p^2}{4}-q}}) \tag{10}$$

将(10) 式变形易解得满足条件的唯一正根 n_0 **.**

从而 $k_{\min}=\frac{1}{f(n)_{\min}+\frac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}}=\frac{1}{f(n_0)+\frac{m^2+4m+1}{(m+1)^2}}$ **.**

特别地，当 m 为某些特殊值时，方程(1) 还可以采用因式分解法来解.

当 m=1 时,(1) 式即为

$n^4+2n^3-n^2-4n-2=0$ **即** $(n+1)^2(n^2-2)=0$ **,** $\because n>0$ **,** $\therefore n=\sqrt{2}$ **.**

由此易得到

定理1　在△ABC中，D为BC边上的中点,G为AD上(不含A、D）上的点,BG、CG的延长线分别交AC、AB于E、F，则有

$$(S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})\le 2(3-2\sqrt{2})S_{\Delta ABC} \tag{11}$$

(当且仅当$\frac{CE}{EA}=\sqrt{2}$**时，上式等号成立).**

(11）式即为文[1] 的命题1.

当m=$m=3+2\sqrt{2}$**时,(1) 式即为**

$n^4+(6-3\sqrt{2})n^3+(9-6\sqrt{2})n^2+(28\sqrt{2}-40)n-100+72\sqrt{2}=0$**即**

$(n+2-\sqrt{2})^2[n^2+(2-\sqrt{2})n-9+6\sqrt{2}]=0$

$\because n>0\ \therefore n=\sqrt{7}-1-\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{7}-1)(2-\sqrt{2})}{2}$.

由此易得到

定理2　在△ABC中，D为BC边上的定点，$\frac{BD}{DC}=3+2\sqrt{2}$**,G为AD上(不含A、D）上的点,BG、CG的延长线分别交AC、AB于E、F，则有**

$$(S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})\le\frac{16(2\sqrt{14}+4-4\sqrt{7}+\sqrt{2})(6\sqrt{7}-9+4\sqrt{14}-7\sqrt{2})}{(2\sqrt{14}-11\sqrt{2}+4\sqrt{7}-12)(2\sqrt{14}-4\sqrt{7}+\sqrt{2})(4\sqrt{7}+2\sqrt{14}-3\sqrt{2})}S_{\Delta ABC} \tag{12}$$

(当且仅当$\frac{CE}{EA}=\frac{(\sqrt{7}-1)(2-\sqrt{2})}{2}$**时,上式等号成立).**

当$m=3-2\sqrt{2}$**时,(1) 式即为**

$n^4+(6+3\sqrt{2})n^3+(9+6\sqrt{2})n^2-(28\sqrt{2}+40)n-102-72\sqrt{2}=0$**即**

$(n+2+\sqrt{2})^2[n^2+(2+\sqrt{2})n-9-6\sqrt{2}]=0$

$\because n>0\ \therefore n=\sqrt{7}-1+\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{7}-1)(2-\sqrt{2})}{2}$.

由此易得到

定理3　在△ABC中，D为BC边上的定点，$\frac{BD}{DC}=3-2\sqrt{2}$**,G为AD上(不含A、D）上的点,BG、CG的延长线分别交AC、AB于E、F，则有**

$$(S_{\Delta BGF}+S_{\Delta CGE})\le\frac{8(2\sqrt{7}-2+\sqrt{14}-\sqrt{2})(2\sqrt{14}+4\sqrt{2}-3\sqrt{7}-6)}{(\sqrt{14}-\sqrt{2}-2\sqrt{7})(2\sqrt{7}+\sqrt{14}-\sqrt{2})(\sqrt{14}-6-2\sqrt{7}+3\sqrt{2})}S_{\Delta ABC} \tag{13}$$

(当且仅当$\frac{CE}{EA}=\frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{2}+2)}{2}$**时,上式等号成立).**

参考文献

[1] 陈四川　母子三角形面积不等式　福建中学数学　2003.4.

[注:我们还收到阙浩涛先生用纸介质寄来的证明,此证明已扫成图片挂在中国不等式研究小组网站“专题研究”栏目中,请读者对照阅读两篇文章,领略各自特色.]

从一个猜想不等式的证明说起
—— 介绍一个优美的不等式链

林 新 群
（福建省仙游县金石中学 351200）

在本文中，设ΔABC的三内角A、B、C所对的三边长分别为a、b、c，s、R、r、Δ分别表示ΔABC的半周长、外接圆半径、内接圆半径、面积，$\sum$ 表示循环和.

1919年，著名几何学家$R\cdot Weitzennock$提出并证明了以下不等式[1]

$$\sum a^2 \ge 4\sqrt{3}\Delta. \qquad (1)$$

后来人们给出了式（1）的种种加强.2000年，我国西藏的刘保乾先生提出了以下优美的不等式（猜想）（LBQ9（d））[2]：

$$\sum a^2\cos^3\frac{B-C}{2} \ge 4\sqrt{3}\Delta. \qquad (2)$$

式（2）显然加强了式（1），对式（2），至今仍未见有人证明.本文先给出式（2）的证明，
然后介绍最近笔者和刘保乾先生共同提出的一个优美的不等式链.

为了证明式（2），首先给出两个引理.

引理1 $\sum a^2\cos(B-C)=\frac{r}{R}\left(s^2+8R^2+6Rr+r^2\right)$. (4)

证明 注意到$\sum a\cos(B-C)=b\cos B+c\cos C$，

$$\begin{aligned}\sum a^2\cos(B-C)&=\sum a(b\cos B+c\cos C)\\&=\sum bc(\cos B+\cos C)\\&=\sum bc\sum\cos A-\sum bc\cos A\\&=\sum bc\sum\cos A-\frac{1}{2}\sum\left(b^2+c^2-a^2\right)\\&=\sum bc\sum\cos A-\frac{1}{2}\sum a^2,\end{aligned}$$ [3] (5)

将恒等式 $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$，$\sum bc=s^2+4Rr+r^2$，$\sum a^2=2\left(s^2-4Rr-r^2\right)$，代入式（5）中，整理即得式（4）.

注意到 $\cos^2\frac{B-C}{2}=\frac{1}{2}\left[1+\cos(B-C)\right]$，得

推论 $\sum a^2\cos^2\frac{B-C}{2}=\frac{1}{2R}\left[(2R+r)s^2+4Rr^2+r^3\right]$. (6)

引理2 若$\cos q\ge-\frac{1}{2}$，则$\cos^3 q\ge\frac{\cos 2q+\cos^2 q}{2}$.

事实上，$\cos^3 q\ge\frac{\cos 2q+\cos^2 q}{2}\Leftrightarrow(\cos q-1)^2(2\cos q+1)\ge 0$.

式（2）的证明 由引理2，易得

$$\sum a^2\cos^3\frac{B-C}{2}\ge\frac{1}{2}\left[\sum a^2\cos(B-C)+\sum a^2\cos^2\frac{B-C}{2}\right],$$

把式（4)、(6）代入上式并整理得:

$$\sum a^2\cos^3\frac{B-C}{2}\ge\frac{1}{4R}\left[(2R+3r)s^2+16R^2r+16Rr^2+3r^3\right].$$

显然,为了证明式（2）,注意到$\Delta=sr$,只需证明

$$\frac{1}{4R}\left[(2R+3r)s^2+16R^2r+16Rr^2+3r^3\right]\ge4\sqrt{3}sr,$$

即 $$(2R+3r)s+\left(16R^2r+16Rr^2+3r^3\right)\frac{1}{s}\ge16\sqrt{3}Rr. \qquad (7)$$

设上式右边为$H(s)$,由$Gerretsen$不等式:$s^2\ge16Rr-5r^2$,及下列不等式

$$16Rr-5r^2\ge\frac{16R^2r+16Rr^2+3r^3}{2R+3r},$$

易知$H(s)$单调递增,故有 $H(s)\ge H\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$.

因此,要证式（7）成立,只需证明

$$(2R+3r)\left(16Rr-5r^2\right)+16R^2r+16Rr^2+3r^3\ge16\sqrt{3}Rr\sqrt{16Rr-5r^2}$$

$$\Leftrightarrow 48R^2+54Rr-12r^2\ge16R\sqrt{16Rr-5r^2}$$

$$\Leftrightarrow 567R^4-1776R^3r+140R^2r^2-324Rr^3+36r^4\ge0$$

$$\Leftrightarrow 768x^4-1184x^3+467x^2-54x+3\ge0 \quad \left(\text{设}\ x=\frac{R}{2r}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(768x^3-416x^2+51x-3\right)\ge0,$$

由$Euler$不等式$R\ge2r$知$x\ge1$,故上式成立,从而不等式（2）即 LBQ9（d）获证.

最近,笔者和刘保乾先生共同提出了以下优美的不等式链:

定理 在三角形 ABC 中,有

$$\sum bc\overset{(8)}{\ge}\sum a^2\cos^2\frac{B-C}{2}\overset{(9)}{\ge}\sum bc\cos\frac{B-C}{2}\overset{(10)}{\ge}4\sqrt{3}\Delta.$$

证明 文[4]已证,刘保乾先生给尹华焱先生来信中提出的一个半对称不等式:

$$w_a\le\frac{\sqrt{3}}{6}bc\sum\frac{1}{a}\Leftrightarrow bc\cos\frac{B-C}{2}\ge4\sqrt{3}\Delta\frac{bc}{\sum bc},$$

上式是式（10）的半对称不等式,故式（10）获证.

由式（6） 和$\sum bc=s^2+4Rr+r^2$,易证式（8） 等价于

$$8R^2-2Rr-r^2\ge s^2,$$

由$Gerrtsen$不等式:$4R^2+4Rr+3r^2\ge s^2$,知上式成立,从而式（10）获证.

下面证明最难的式（9）.

$$\because\sum a\cos(B-C)=\sum a\frac{2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2-b^4-c^4}{2a^2bc}=\frac{1}{2abc}\sum\left(2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2-b^4-c^4\right)$$

$$=\frac{1}{abc}\left(2\sum b^2c^2-\sum a^4\right)=\frac{1}{abc}16\Delta^2=\frac{4sr}{R},$$

$$\therefore \sum bc\cos(B-C)=\sum\left(a^2+\sum bc\right)\cos(B-C)-\sum a(a+b+c)\cos(B-C)$$
$$=\sum a^2\cos(B-C)+\sum bc\sum\cos(B-C)-2s\sum a\cos(B-C)$$
$$=\sum a^2\cos(B-C)+\sum bc\sum\cos(B-C)-\frac{8s^2r}{R},$$

再把式（4）、$\sum bc=s^2+4Rr+r^2$、$\sum\cos(B-C)=\frac{1}{2R^2}\left(s^2+2Rr+r^2-2R^2\right)$

$\sum bc\cos(B-C)=2\sum bc\cos^2\frac{B-C}{2}-\sum bc$ 代入上式得恒等式:

$$\sum bc\cos^2\frac{B-C}{2}=\frac{1}{4R^2}\left[s^4-\left(8Rr-2r^2\right)s^2+16R^3r+20R^2r^2+8Rr^3+r^4\right]$$

由于$\sum bc\cos\frac{B-C}{2}\le\frac{1}{2}\sum bc+\frac{1}{2}\sum bc\cos^2\frac{B-C}{2}$，所以，要证式（9），只需证明:

$$\frac{1}{2}\sum bc+\frac{1}{2}\sum bc\cos^2\frac{B-C}{2}\le\sum a^2\cos^2\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{s^2+4Rr+r^2}{2}+\frac{1}{8R^2}\left[s^4-\left(8Rr-2r^2\right)s^2+16R^3r+20R^2r^2+8Rr^3+r^4\right]$$
$$\le\frac{1}{2R}\left[(2R+r)s^2+4Rr^2+r^3\right]\quad\text{（利用式（6））}$$

$$\Leftrightarrow\quad -s^4+\left(4R^2+12Rr-2r^2\right)s^2-\left(32R^3r+8R^2r^2+4Rr^3+r^4\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(4R^2+4Rr+r^2-s^2\right)\left(s^2-16Rr+5r^2\right)+8Rr\left(4R^2+4Rr+r^2-s^2\right)$$
$$+4r^2(R+2r)(R-2r)\ge 0,$$

由 *Euler* 不等式、*Gerretsen* 不等式，上式显然成立，从而式（9）获..定理证毕.

注:式（2）和式（10）不分强弱.

参考文献

[1] 李炯生，黄国勋．中国初等数学研究，北京科学技术文献出版社，1992．

[2] 刘保乾．110 个有趣的不等式问题．不等式研究，杨学枝主编，西藏人民出版社，2000．6．

[3] 陈计，叶中豪．初等数学前沿，江苏教育出版社， 1996．4．

[4] 尹华焱．几个边长成等差数列时取等的半对称不等式，不等式研究通讯，中国不等式研究小组主办， 2002(1)．

[5] 刘保乾．BOTTEMA，我们看见了什么？西藏人民出版社，2003．1．

关于三角形内、外心距离不等式的指数推广

林 新 群

（福建省仙游县金石中学　　351200）

刘保乾先生在文[1]、[2]中分别给出了下列两个不等式:

$$R^2-2Rr\ge\frac{1}{4}(b-c)^2,\qquad(1)$$

$$\frac{R}{2r}\ge\frac{w_a{}^2}{h_a{}^2}.\qquad(2)$$

刘先生在文[3]中又提出了下列三个不等式猜想：

BF35（a）： $R^2-2Rr\ge\frac{1}{8}\left(\frac{b+c}{a}\right)(b-c)^2$.

BF35（b）： $R^2-2Rr\ge\frac{1}{16}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2(b-c)^2$.

BF95（g）： $R^2-2Rr\ge\frac{1}{16}\frac{w_a{}^2}{h_a{}^2}(b-c)^2$.

经探究,上述不等式有下列指数推广的不等式.

定理　在三角形ABC**中,有**

$$R^2-2Rr\ge\frac{1}{4}\left(\frac{w_a}{h_a}\frac{b+c}{2a}\right)^l(b-c)^2,\qquad(3)$$

$$\Leftrightarrow R^2-2Rr\ge\frac{1}{4}\left[\frac{bc}{(a+c-b)(a+b-c)}\right]^{\frac{l}{2}}(b-c)^2,$$

其中实数$l\in[0,2]$.

证明　设$x=\cos\frac{B-C}{2}\quad(\le 1)$**,则有**

$$f=1-4x\sin\frac{A}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}\ge 1-x^2,\qquad(4)$$

$$f=1-4x\sin\frac{A}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^2(1-x^2),\qquad(5)$$

事实上，（4）等价于$\left(2\sin\frac{A}{2}-x\right)^2\ge 0$，**（5）等价于**$\left(1-2x\sin\frac{A}{2}\right)^2\ge 0$.

当$A<60^\circ$**时,有**$0<2\sin\frac{A}{2}<1$**,又**$2-l\in[0,2]$**,则**$1\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}$，

由（4）得: $f\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}(1-x^2)$；

当$A\ge 60^\circ$**时,有**$2\sin\frac{A}{2}\ge 1$，$2-l\in[0,2]$**,则**$\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^2\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}$，

由（5）得: $f\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}(1-x^2)$.

综上,对任意三角形 ABC,总有

$$f\ge\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}(1-x^2).\qquad(6)$$

把 $R^2-2Rr=\left(1-4x\sin\frac{A}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}\right)R^2=fR^2$，

和 $\frac{1}{4}\left(\frac{w_a}{h_a}\frac{b+c}{2a}\right)^l(b-c)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}\right)^l\cdot 16R^2\sin^2\frac{A}{2}\left(1-x^2\right)$，

$$=\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{2-l}\left(1-x^2\right)R^2.$$

代入式（6）即得式（1），定理获征.

在定理中取 $l=0$、1、2，可推出下面的结论.

推论 1 $R^2-2Rr\ge\frac{1}{4}(b-c)^2$ （即式（1））.

推论 2 $R^2-2Rr\ge\frac{1}{8}\left(\frac{w_a}{h_a}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)(b-c)^2\Rightarrow$ BF35（a）.

推论 3 $R^2-2Rr\ge\frac{1}{16}\left(\frac{w_a}{h_a}\right)^2\left(\frac{b+c}{a}\right)^2(b-c)^2\Leftrightarrow\frac{R}{2r}\ge\frac{w_a^{\ 2}}{h_a^{\ 2}}$

$\Rightarrow$ BF35（b）和 BF95（g）.

注：式(1)取等的充要条件是 $\cos B+\cos C=1$；式(2)取等的充要条件是 $b+c=2a$；当 $l\in(0,2)$ 时，式(3)取等的充要条件是 $a=b=c$.

参考文献

[1]刘保乾．问题解答 $Cwd-72$，不等式通讯，中国不等式研究小组主办，1998（6）.
[2]刘保乾．$Gerretsen$ 不等式的等价形式及其应用，西藏大学学报，1995.3.
[3]刘保乾．$BOTTEMA$，我们看见了什么？西藏人民出版社，2003 年 1 月.

三元齐次轮换对称式及其应用

陈胜利
（福建南安市五星中学 362341）

摘要：本文首先给出几个三元齐次轮换对称恒等式，然后运用配方法导出若干轮换对称不等式，并介绍其广泛应用.

关键词：三元齐次，轮换对称，恒等式，不等式.

定理 1 记 $\Sigma x^n=x^n+y^n+z^n$，$\Sigma x^my^n=x^my^n+y^mz^n+z^mx^n$，$\sigma_1=\Sigma x$，$\sigma_2=\Sigma yz$，$\sigma_3=\Pi x$，则有

(1.1) $\Sigma x^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$

(1.2) $\Sigma x^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$

(1.3) $\Sigma x^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$

(1.4) $\Sigma x^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_3(\sigma_1^2-\sigma_2)$

(1.5) $\Sigma x^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 3\sigma_3^2$

(1.6) $\Sigma x^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_3(\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2) + 7\sigma_1\sigma_3^2$

(1.7) $\Sigma x^2y = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 - \Sigma xy^2 = \dfrac{1}{2}[\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 - \Pi(x-y)]$

(1.8) $\Sigma x^3y = \sigma_1\Sigma x^2y - \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3$

(1.9) $\Sigma x^4y = (\sigma_1^2 - \sigma_2)\Sigma x^2y - \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_3(\sigma_1^2 + \sigma_2)$

(1.10) $\Sigma x^3y^2 = \sigma_2\Sigma x^2y - \sigma_3(\sigma_1^2 - \sigma_2)$

(1.11) $\Sigma x^5y = (\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3)\Sigma x^2y - \sigma_2^2(\sigma_1^2 - \sigma_2) + \sigma_1^3\sigma_3$

(1.12) $\Sigma x^4y^2 = (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\Sigma x^2y - \sigma_2^3 - \sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) - 3\sigma_3^2$

(1.13) $\Sigma x^6y = (\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y - \sigma_1^3\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2^3$
$\quad + \sigma_3(\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + \sigma_1\sigma_3^2$

(1.14) $\Sigma x^5y^2 = (\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y - \sigma_1\sigma_2^3 - \sigma_1^2\sigma_3(\sigma_1^2 - 5\sigma_2) - 5\sigma_1\sigma_3^2$

(1.15) $\Sigma x^4y^3 = (\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y - \sigma_2\sigma_3(\sigma_1^2 - \sigma_2) + \sigma_1\sigma_3^2$

下面仅以(1.4),(1.15)**为例给出证明**:

$$\begin{aligned}\Sigma x^5 &= \sigma_1\Sigma x^4 - \sigma_2\Sigma x^3 + \sigma_3\Sigma x^2 = \sigma_1(\sigma_1\Sigma x^3 - \sigma_2\Sigma x^2 + \sigma_3\Sigma x) - \sigma_2\Sigma x^3 + \sigma_3\Sigma x^2\\ &= (\sigma_1^2 - \sigma_2)\Sigma x^3 - (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\Sigma x^2 + \sigma_1^2\sigma_3\\ &= (\sigma_1^2 - \sigma_2)(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1^2\sigma_3\\ &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_3(\sigma_1^2 - \sigma_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Sigma x^4y^3 - \Sigma x^3y^4 = x^3y^3(x-y) + y^3z^3(y-z) - z^3x^3(x-y+y-z)\\ &= x^3(x-y)(y^3 - z^3) + z^3(y-z)(y^3 - x^3)\\ &= (x-y)(y-z)[x^3(y^2 + yz + z^2) - z^3(x^2 + xy + y^2)]\\ &= -(x-y)(y-z)(z-x)[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(x+y+z)] = (2\Sigma x^2y - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3),\\ &\Sigma x^4y^3 + \Sigma x^3y^4 = \Sigma x^3y^3(\sigma_1 - z) = \sigma_1\Sigma x^3y^3 - \sigma_3\Sigma x^2y^2 = \sigma_1(\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2) - \sigma_3(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3),\end{aligned}$$

以上两式相加后除以 2 **即得**(1.15).

定理 2 **设** $x, y, z \in R^+$,**则有**

(2.1) $3\sigma_3 \le \Sigma x^2y \le \sigma_1\sigma_2 - 6\sigma_3$

(2.2) $\sigma_2^2 \le \sigma_1\Sigma x^2y \le \sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2) - 3\sigma_1\sigma_3$

(2.3) $\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_3(\sigma_1^2 - 6\sigma_2) \le (\sigma_1^2 - \sigma_2)\Sigma x^2y \le \sigma_1^3\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_3(4\sigma_1^2 - 9\sigma_2)$

(2.4) $\sigma_1^2\sigma_3 \le \sigma_2\Sigma x^2y \le \sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_3(\sigma_1^2 + 3\sigma_2)$

(2.5) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 7\sigma_2) + 9\sigma_3^2 \le (\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2)\Sigma x^2y$
$\quad \le \sigma_1^4\sigma_2 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3(4\sigma_1^2 - 13\sigma_2) - 9\sigma_3^2$

(2.6) $\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) \le (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3)\Sigma x^2y$
$\quad \le \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^3 - \sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 + 2\sigma_2) + 9\sigma_3^2$

(2.7) $\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_3(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) \le \sigma_1\sigma_2\Sigma x^2y \le \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^3 - \sigma_1^3\sigma_3$

(2.8) $-\sigma_2^3 + 5\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 9\sigma_3^2 \le 3\sigma_3\Sigma x^2y \le \sigma_2^3 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

(2.9) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2^3 - \sigma_3(\sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 + 7\sigma_2^2) + 9\sigma_1\sigma_3^2 \le (\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y$
$\quad \le \sigma_1^5\sigma_2 - 4\sigma_1^3\sigma_2^2 + 3\sigma_1\sigma_2^3 - 2\sigma_3(2\sigma_1^4 - 9\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2^2) - 12\sigma_1\sigma_3^2$

(2.10) $\sigma_1\sigma_2^3 + \sigma_3(\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2) + 6\sigma_1\sigma_3^2 \le (\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y$
$\quad \le \sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2^3 - \sigma_3(\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2 - 5\sigma_2^2) + 3\sigma_1\sigma_3^2$

(2.11) $\sigma_2\sigma_3(\sigma_1^2 + \sigma_2) - 6\sigma_1\sigma_3^2 \le (\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y \le \sigma_1\sigma_2^3 - 2\sigma_2\sigma_3(\sigma_1^2 + 2\sigma_2) + 9\sigma_1\sigma_3^2$

下面只证左边不等式（因右边可据左边作代换$(x, y, z) \to (x, z, y)$**推得）**:

由三元均值不等式即得(2.1)**左边不等式；**

由 $0 \le \Sigma xy(x-z)^2 = \Sigma x^3y - \sigma_1\sigma_3$ **及**(1.8)**立得**(2.2)**左式；**

由 $0 \le \Sigma x^2y(x-z)^2 = \Sigma x^4y - 2\sigma_3\Sigma x^2 + \sigma_2\sigma_3$ **及**(1.9),(1.1)**立得**(2.3)**左式；**

由 $0 \le \Sigma xy^2(x-z)^2 = \Sigma x^3y^2 - \sigma_2\sigma_3$ **及**(1.10)**立得**(2.4)**左式；**

由 $0 \le \Sigma x^3y(x-z)^2 = \Sigma x^5y - 2\sigma_3\Sigma x^3 + \sigma_3\Sigma xy^2$ **及**(1.11),(1.2),(1.7)**立得**(2.5)**左式；**

由 $0 \le \Sigma x^2y^2(x-z)^2 = \Sigma x^4y^2 - 2\sigma_3\Sigma x^2y + 2\sigma_3^2$ **及**(1.12)**立得**(2.6)**左式；**

由 $0\le\Sigma y^2(x^2-yz)^2=2\Sigma x^4y^2-2\sigma_3\Sigma xy^2$ 及(1.12),(1.7)立得(2.7)左式；

由 $0\le\Sigma xy^3(x-z)^2=\Sigma x^3y^3-2\sigma_3\Sigma xy^2+\sigma_3\Sigma x^2y,\Sigma x^3y^3=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2$ 及(1.7)立得(2.8)左式；

由 $0\le\Sigma x^4y(x-z)^2=\Sigma x^6y-2\sigma_3\Sigma x^4+\sigma_3\Sigma x^3z$ 及(1.13),(1.8),(1.7)立得(2.9)左式；

由 $0\le\Sigma x^3y^2(x-z)^2=\Sigma x^5y^2-2\sigma_3\Sigma x^3y+\sigma_1\sigma_3^2$ 及(1.14),(1.8)立得(2.10)左式；

由 $0\le\Sigma x^2y^3(x-z)^2=\Sigma x^4y^3-2\sigma_3\Sigma x^2y^2+\sigma_1\sigma_3^2,\Sigma x^2y^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$ 及(1.15)立得(2.11)左式,证毕.

下面应用上述定理对刘保乾先生在中国不等式研究小组网页上所提几个三角形不等式作出简要的证明:

$$\Sigma a^2b(a-b)\ge 2\Delta^2\left(\sum\frac{a}{b}-3\right)\tag{①}$$

$$\Sigma a^2(ac-b^2)\ge 2\Delta^2\left(\sum\frac{a}{b}-3\right)\tag{②}$$

$$\Sigma a^t(a-b)(s-c)\ge 0\quad (t=1,2,3,4)\tag{③}$$

$$\Sigma a^t(a-b)(s-c)\le 0\quad (t=-1,-2)\tag{④}$$

作代换 $a=y+z,b=z+x,c=x+y,x,y,z\in R^+$,则

$$①\Leftrightarrow\sigma_1^2\sigma_2\Sigma x^2y\le\sigma_1^3\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2^3-\sigma_3(\sigma_1^4-\sigma_2^2)-3\sigma_1\sigma_3^2\tag{⑤}$$

由(2.7),只要证⑤右边 $\ge\sigma_1(\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_3^3)-\sigma_1^4\sigma_3$,即 $\sigma_2^2\ge 3\sigma_1\sigma_3$,此式成立,故⑤得证；

$$②\Leftrightarrow(\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y\ge\sigma_1\sigma_3^3+\sigma_3(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2)+6\sigma_1\sigma_3^2\tag{⑥}$$

由于 $\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3=(\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+(\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_3$,因而据(2.10),(2.11),(2.1)有 $(\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3)\Sigma x^2y\ge\sigma_1\sigma_3^3+\sigma_3(\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2)+6\sigma_1\sigma_3^2+\sigma_2\sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2)-6\sigma_1\sigma_3^2+6\sigma_1\sigma_3^2$,整理即得⑥式；

当 $t=1,2,3,4$ 时③分别化为

$$\Sigma x^2y\le\sigma_1\sigma_2-6\sigma_3\tag{⑦}$$

$$\sigma_1\Sigma x^2y\le\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2-9\sigma_1\sigma_3\tag{⑧}$$

$$(\sigma_1^2-\sigma_2)\Sigma x^2y\le\sigma_1^3\sigma_2+\sigma_1\sigma_2^2-6\sigma_3(2\sigma_1^2-\sigma_2)\tag{⑨}$$

$$(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)\Sigma x^2y\le\sigma_1^4\sigma_2+\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3(15\sigma_1^2-14\sigma_2)+6\sigma_3^2\tag{⑩}$$

由(2.1),(2.2),(2.3)及 $\sigma_2^2\ge 3\sigma_1\sigma_3,\sigma_1^2\ge 3\sigma_2$ 易证⑦~⑨；

由(2.5),(2.1)有

$$(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)\Sigma x^2y\le\sigma_1^4\sigma_2-3\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3(4\sigma_1^2-13\sigma_2)-12\sigma_3^2\tag{⑪}$$

于是为证⑪,只要证

$$18\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2(11\sigma_1^2-\sigma_2)+4\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3\ge 0\tag{⑫}$$

当 $z=0,y=1$ 时上式化为 $2(x-1)^2(9x^2+5x+7)\ge 0\ (x>0)$,故由文[1]或[2]知⑫成立；

当 $t=-1,-2$ 时④分别化为

$$\sigma_1\Sigma x^2y\le\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3\tag{⑬}$$

$$(\sigma_1^3+\sigma_3)\Sigma x^2y\le\sigma_1^4\sigma_2-\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_2^3-\sigma_1\sigma_3(3\sigma_1^2-4\sigma_2)-6\sigma_3^2\tag{⑭}$$

由(2.2)即知⑬成立；

由 $\sigma_1^3+\sigma_3=(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2)+2(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+7\sigma_3$ 及(2.5),(2.6),(2.1)得

$$(\sigma_1^3+\sigma_3)\Sigma x^2y\le\sigma_1^4\sigma_2-\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_2^3-\sigma_1\sigma_3(6\sigma_1^2-16\sigma_2)-33\sigma_3^2\tag{⑮}$$

于是为证⑭,只要证 $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\ge 0$,即 $\Sigma x(x-y)(x-z)\ge 0$,此式成立,故⑭得证.

应用(1.1)~(1.15)及(2.1)~(2.11),我们还可方便地证明刘保乾在文[3]~[5]中提出的数十个轮换对称不等式,可见本文定理和方法是十分有用的.

参考文献

[1] 陈胜利. 一类三元六次对称不等式的简化证法[J]. 福建中学数学,2002(10).

[2] 陈胜利. 三元不等式的简化证法综述[J]. 见刘保乾著:BOTEEMA,我们看见了什么,拉萨:西藏人民出版社, 2003. 1.

[3] 刘保乾. BOTEEMA,我们看见了什么[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2003. 1.

[4] 刘保乾. BOTEEMA,我们看见了什么[J]. 不等式研究通讯,总第 31 期, 2001.6

[5] 刘保乾. 110 个有趣的不等式问题[C]. 见杨学校主编:不等式研究(第一辑),拉萨:西藏人民出版社,2000.6.

关于一个轮换对称式的界

陈胜利
（福建省南安市五星中学 362341）

摘要：本文对刘保乾先生用 BOTTEMA 软件发现的一个轮换对称式的界给出直接推理证明．

关键词：轮换对称式，上下界，直接推理证明．

刘保乾先生在热点问题 1 的评注 1 中指出，关于$\sum\frac{ab}{b+c}$的界，有如下结论（用 BOTTEMA 软件验证）：

$$ls\ge\ \sum\frac{ab}{b+c}\ \ \ge ks \qquad (1)$$

其中 $k=1-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{5}$，$l=1+\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{3}\sqrt{5}$ $\quad(1-k=l-1)$.

下面给出（1）的一个直接推理证明．记 $T_1=a+b+c$，$T_1=ab+bc+ca$，$T_3=abc$，则（1）等价于

$$kT_1T_2-(2+k)T_3\le 2\sum a^2b\le lT_1T_2-(2+l)T_3\Leftrightarrow kT_1T_2-(2+k)T_3\le T_1T_2-3T_3-\Pi(a-b)\le lT_1T_2-(2+l)T_3$$

$$\Leftrightarrow(1-l)(T_1T_2-T_3)\le\Pi(a-b)\le(1-k)(T_1T_2-T_3)\Leftrightarrow F(a,b,c)\equiv\left|\frac{\Pi(a-b)}{\Pi(a+b)}\right|\le 1-k=\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{3} \qquad (2)$$

不妨设 $a>b>c$（当 $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$ 时上式显然成立），则（2）化为

$$0<F(a,b,c)\le 1-k \qquad (3)$$

注意到

$$F(a,b,c)-F(b+c,b,c)=\frac{b-c}{b+c}\left[\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}-\frac{bc}{(2b+c)(2c+b)}\right]$$

$$=\frac{2(b-c)(a-b-c)(ab+ca-bc)}{(a+b)(a+c)(2b+c)(2c+b)}<0,$$

于是（3）式成立的充要条件是

$$F(b+c,b,c)=\frac{bc(b-c)}{(b+c)(2b+c)(2c+b)}\le 1-k\quad(b>c>0) \qquad (4)$$

令 $b=c(1+x)$，$x>0$，则上式化为

$$\frac{1}{1-k}\le\frac{(2+x)(3+2x)(3+x)}{x(1+x)}=f(x)\quad(x>0) \qquad (5)$$

对 $f(x)$ 求导数，并令 $f(x)'=0$，得

$$x^4+2x^3-7x^2-18x-9=0\Leftrightarrow 10(3x^2-28x-28)^2=(41x^2-89x-89)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{10}\,(3x^2-28x-28)=-(41x^2-89x-89)\quad(\because x>0)$$

$$\Leftrightarrow(41+13\sqrt{10})x^2-(89+28\sqrt{10})x-(89+28\sqrt{10})=0\quad(x>0)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{89+28\sqrt{10}+\sqrt{44917+14204\sqrt{10}}}{2(41+13\sqrt{10})}$$

$$=\frac{89+28\sqrt{10}+67\sqrt{5}+106\sqrt{2}}{2(41+13\sqrt{10})}=\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1),$$

记 $x_0=\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)$，则当 $0<x<x_0$ 时 $f(x)'<0$，当 $x>x_0$ 时 $f(x)'>0$，故有

$$f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0+11+\frac{16x_0+18}{x_0^{\ 2}+x_0}$$

$$=\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+10+\frac{4(4\sqrt{10}+4\sqrt{5}+4\sqrt{2}+5)}{\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+8}=8\sqrt{2}+5\sqrt{5},$$

从而使（5）式成立的最大 k 值为

$$k_{\max}=1-\frac{1}{f(x_0)}=1-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{5},$$

于是不等式（2）成立,（1）得证,且知其中系数 k,l 是最优的.

“u—v”代换证法新例

吴裕东

(浙江省新昌中学 312500)

西藏刘保乾先生在文[1]提出了如下的非对称不等式猜想:

BF141 $\dfrac{1}{6}(1+\dfrac{r}{R})\dfrac{\sqrt{bc}}{a}\geq\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

BF179 $r_a+\dfrac{Rs}{a}\geq\sqrt{s(s-b)}+\sqrt{s(s-c)}$

BF193 $\dfrac{\sum a^2}{bc}\geq\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{a^2b^2+a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

(其中不等式 BF193 可推广为 a,b,c 为任意正数).

BF200(b) $a(b+c)\geq\dfrac{4}{9}\Delta\sum\tan\dfrac{A}{2}\bullet(2+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c})$

最近刘先生又在中国不等式研究小组的网站中提出如下的

猜想 $$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\geq 2 \qquad (*)$$

笔者在拙作[2],[3]用“u—v”代换法证明了一些不等式猜想,下面用“u—v”代换法从新的角度给出以上几个猜想的证明.

1. BF141 的证明

[证明] $\dfrac{1}{6}(1+\dfrac{r}{R})\dfrac{\sqrt{bc}}{a}\geq\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow(1+\dfrac{r}{R})\dfrac{\sqrt{bc}}{a}\geq 6\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[1+\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right]\frac{\sqrt{bc}}{a}\geq 6\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{[abc+4(s-a)(s-b)(s-c)]\sqrt{bc}}{a^2bc}\geq\frac{6(s-a)\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a\sqrt{bc}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2bc}\geq\frac{6(s-a)\sqrt{(s-b)(s-c)}}{abc}$$

$$\Leftrightarrow abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\geq 6a(s-a)\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

$$\Leftrightarrow [abc+4(s-a)(s-b)(s-c)]^2 \ge 36a^2(s-a)^2(s-b)(s-c) \qquad (1)$$

先作代换 $\begin{cases} a=(l+m)z \\ b=(l+1)z \\ c=(m+1)z \end{cases}$ $,(l,m,z>0)$,**则不等式**(1)

$$\Leftrightarrow [(l+m)(l+1)(m+1)+4lm]^2 z^6 \ge 36(l+m)^2 lmz^6$$

$$\Leftrightarrow [(l+m)(l+1)(m+1)+4lm]^2 \ge 36(l+m)^2 lm \qquad (2)$$

再作代换 $u=l+m, v=lm$,**则** $u>0, v>0$,**从而不等式**(2)

$$\Leftrightarrow [u(u+v+1)+4v]^2 \ge 36u^2v \Leftrightarrow [u(u+v+1)+4v]^2-36u^2v \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (u^2+8u+16)v^2+(2u^3-26u^2+8u)v+u^4+2u^3+u^2 \ge 0 \qquad (3)$$

不等式(3)**的判别式** $\Delta=-144u^3(u-2)^2 \le 0$,**所以不等式**(3)**显然成立,从而 BF141 获证**.

2. BF179 的证明

[**证明**] $r_a+\dfrac{Rs}{a} \ge \sqrt{s(s-b)}+\sqrt{s(s-c)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta}{s-a}+\frac{bcs}{4\Delta} \ge \sqrt{s}(\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}) \Leftrightarrow \frac{4\Delta^2+bcs(s-a)}{4\Delta(s-a)} \ge \sqrt{s}(\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c})$$

$$\Leftrightarrow s(s-a)[4(s-b)(s-c)+bc] \ge 4s(s-a)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}(\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c})$$

$$\Leftrightarrow [4(s-b)(s-c)+bc] \ge 4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}(\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c})$$

$$\Leftrightarrow [4(s-b)(s-c)+bc]^2 \ge 16(s-a)(s-b)(s-c)[a+2\sqrt{(s-b)(s-c)}] \qquad (4)$$

先作代换 $\begin{cases} a=(l+m)z \\ b=(l+1)z \\ c=(m+1)z \end{cases}$ $,(l,m,z>0)$,**则不等式**(4)

$$\Leftrightarrow [4lm+(lm+l+m+1)]^2 z^4 \ge 16lm[l+m+2\sqrt{lm}]z^4$$

$$\Leftrightarrow [4lm+(lm+l+m+1)]^2 \ge 16lm[l+m+2\sqrt{lm}] \qquad (5)$$

再作代换 $u=l+m, v=lm$,**则** $u>0, v>0$,**且** $v \le \dfrac{u^2}{4}$ **从而不等式**(5)

$$\Leftrightarrow [4v+(u+v+1)]^2 \ge 16v[u+2\sqrt{v}]$$

$$\Leftrightarrow [u+5v+1]^2 \ge 16v[u+2\sqrt{v}] \qquad (6)$$

又令 $t=\sqrt{v}$,**则** $t>0, t \le \dfrac{u}{2}$,**从而不等式**(6)

$$\Leftrightarrow [u+5t^2+1]^2 \ge 16t^2[u+2t] \Leftrightarrow [u+5t^2+1]^2-16t^2[u+2t] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow u^2+(2-6t^2)u+25t^4-32t^3+10t^2+1 \ge 0 \qquad (7)$$

不等式(7)**的判别式** $\Delta=-64t^2(t-1)^2 \le 0$,**所以不等式**(7)**显然成立,从而 BF179 获证**.

3. BF193 的证明

[**证明**] $\dfrac{\sum a^2}{bc} \ge \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{a^2b^2+a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$\Leftrightarrow 2\sum a^2\cdot\sum b^2c^2\ge 9a^2bc(b^2+c^2)$ $\Leftrightarrow 2[1+\frac{b^2+c^2}{a^2}][\frac{b^2c^2}{a^4}+\frac{b^2+c^2}{a^2}]\ge 9\frac{bc}{a^2}\frac{b^2+c^2}{a^2}$

(8)

先作代换$\frac{b}{a}=l,\frac{c}{a}=m$,**则**$l>0,m>0$,**从而不等式**(8)

$\Leftrightarrow 2(1+l^2+m^2)(l^2m^2+l^2+m^2)\ge 9lm(l^2+m^2)$ (9)

再作代换$u=l+m,v=lm$,**则**$u>0,v>0,u^2\ge 4v$,**从而不等式**(9)

$\Leftrightarrow 2(1+u^2-2v)(u^2-2v+v^2)\ge 9v(u^2-2v)$

$\Leftrightarrow 2(1+u^2-2v)(u^2-2v+v^2)-9v(u^2-2v)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2u^4+(2v^2-17v+2)u^2-4v^3+28v^2-4v\ge 0$ (10)

令$f(u^2)=2u^4+(2v^2-17v+2)u^2-4v^3+28v^2-4v,(u^2\ge 4v)$,**则欲证不等式**(10)**只需证**$f(u^2)\ge 0,(u^2\ge 4v)$.**易得函数**

$$f(u^2)=2u^4+(2v^2-17v+2)u^2-4v^3+28v^2-4v,(u^2\ge 4v)$$

的对称轴为$u^2=-\frac{2v^2-17v+2}{4}$,**不难证明**$-\frac{2v^2-17v+2}{4}<4v$,**所以函数** f **在区间**$[4v,+\infty)$ **上关于**u^2**单调递增.从而**

$$f(u^2)\ge f(4v)=4v(v-1)^2\ge 0$$

即不等式(10)**成立,从而 BF193 获证**.

4. BF200(b)的证明

[**证明**] **刘保乾先生指出因为有** $4\Delta\sum\tan\frac{A}{2}=\sum a^2-\sum(b-c)^2$,**所以 BF200(b)可加强为**

$$9abc(b+c)-[\sum a^2-\sum(b-c)^2](b+c)(a+b+c)\ge bc(b-c)^2 \quad (11)$$

下面来证加强式(11),**不等式**(11)

$\Leftrightarrow (b+c)\{9abc-(a+b+c)[2\sum bc-\sum a^2]\}\ge bc(b-c)^2$ (12)

先作代换$\begin{cases}a=(l+m)z\\ b=(l+1)z\\ c=(m+1)z\end{cases}$,$(l,m,z>0)$,**则不等式**(12)

$\Leftrightarrow (l+m+2)\cdot[9(l+m)(l+1)(m+1)-8(l+m+1)(l+m+lm)]z^5\ge 9(u+v+1)$
$\bullet(u^2-4v)z^5$ (13)

再作代换$u=l+m,v=lm$,**则**$u>0,v>0,u^2\ge 4v$,**从而不等式**(13)

$\Leftrightarrow (u+2)[9u(u+v+1)-8(u+1)(u+v)]z^5\ge 9(u+1)(u^2-4v)z^5$

$\Leftrightarrow (u+2)[9u(u+v+1)-8(u+1)(u+v)]\ge 9(u+1)(u^2-4v)$

$\Leftrightarrow (u+2)[9u(u+v+1)-8(u+1)(u+v)]-9(u+1)(u^2-4v)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2u^2+2u-2(u+6)v+4v^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (u-2v)^2+u^2+2uv+2u-12v\ge 0$ (14)

由均值不等式易得: $u^2+2uv+2u\ge 3\sqrt[3]{4u^4v}$,**又**$u^2\ge 4v$,**所以**

$$u^2+2uv+2u\ge 3\sqrt[3]{4u^4v}\ge 3\sqrt[3]{(4v)^3}=12v$$

即 $u^2+2uv+2u-12v\ge 0$,所以不等式(14)成立,从而加强式(11)获证.

5. 不等式(*)的证明

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\ge 2-\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\ge\frac{2a^2+(b+c)a+2bc-(b^2+c^2)}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a}{b+c}\ge\left[\frac{2a^2+(b+c)a+2bc-(b^2+c^2)}{(a+b)(a+c)}\right]^2 \qquad (15)$$

先作代换 $\begin{cases}a=(l+m)z\\ b=(l+1)z\\ c=(m+1)z\end{cases}$ $,(l,m,z>0)$,则不等式(15)

$$\Leftrightarrow\frac{2(l+m)}{l+m+2}\ge\left[\frac{2(l+m)^2+(l+m+2)(l+m)-(l-m)^2}{(2l+m+1)(l+2m+1)}\right]^2 \qquad (16)$$

再作代换 $u=l+m, v=lm$,则 $u>0, v>0, u^2\ge 4v$,从而不等式(16)

$$\Leftrightarrow\frac{2u}{u+2}\ge\left[\frac{2u^2+2u+4v}{2u^2+3u+v+1}\right]^2\Leftrightarrow 2u(2u^2+3u+v+1)^2\ge 4(u+2)(u^2+u+2v)^2$$

$$\Leftrightarrow u(2u^2+3u+v+1)^2\ge 2(u+2)(u^2+u+2v)^2$$

$$\Leftrightarrow u(2u^2+3u+v+1)^2-2(u+2)(u^2+u+2v)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2u^5+4u^4+3u^3+2u^2+u-(4u^3+18u^2+14u)v-(7u+16)v^2\ge 0$$

$$\Leftarrow 2u^5+4u^4+3u^3+2u^2+u-(4u^3+18u^2+14u)\cdot\frac{u^2}{4}-(7u+16)\cdot\left(\frac{u^2}{4}\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{16}u(3u+2)^2(u-2)^2\ge 0 \qquad (17)$$

不等式(17)显然成立,所以不等式(*)获证

参考文献

[1] 刘保乾著.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P319—326.

[2] 吴裕东.证明一类三角形不等式的 u—v 代换法.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》(刘保乾著)[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P573—578.

[3] 吴裕东.“u—v”代换法与几个不等式的证明.不等式研究通讯[J],2003 年第 4 期.

两个规范几何量不等式猜想的统一证明

吴裕东
(浙江省新昌中学 312500)

西藏刘保乾先生在文[1]**提出了如下的规范几何量不等式猜想**:

BG22 $\frac{2}{2^t} \ge \left(\frac{l_a}{r_a+l_a}\right)^t + \left(\frac{r}{l_a-r}\right)^t$

$t=1, l_a=w_a$; $t=1, l_a=m_a$; $t=1, l_a=k_a$; $t=1, l_a=\sqrt{s(s-a)}$;

$t=1, l_a=\frac{1}{2}(r_b+r_c)$; $t=1, l_a=\frac{{w_a}^2}{h_a}$; $t=1, l_a=\frac{s(s-a)}{w_a}$;

$t=1, l_a=\frac{s(s-a)}{m_a}\{\Delta_a\}$**时反向**; $t=-\frac{1}{2}, l_a=h_a$ **时反向成立**.

BG91(a) $\frac{l_a-r}{r_a+l_a}+\frac{2r}{l_a} \le 1$

$l_a=w_a; l_a=m_a; l_a=\sqrt{s(s-a)}; l_a=k_a; l_a=\frac{{w_a}^2}{h_a}; l_a=\frac{s(s-a)}{w_a}$; $l_a=\frac{s(s-a)}{m_a}$

$\{\Delta_a\}$**时反向**, $l_a=\frac{1}{2}(r_b+r_c); l_a=r+\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; $l_a=2r+r\cdot\frac{l_a'}{r_a}(l_a'=m_a,h_a,w_a)$.

(b)* $\frac{l_a-r}{r_a+l_a}+\frac{2r}{l_a} \ge \frac{h_a}{l_a}$ (**此式为刘先生在来信中提出**) $l_a=h_a; l_a=w_a; l_a=m_a$ **等**.

下面给出这两个规范几何量不等式猜想的统一证明.

[**证明**] **当**$t=1$**时**, $\frac{2}{2^t} \ge \left(\frac{l_a}{r_a+l_a}\right)^t + \left(\frac{r}{l_a-r}\right)^t \Leftrightarrow \frac{l_a}{r_a+l_a}+\frac{r}{l_a-r} \le 1$

$\Leftrightarrow l_a(l_a-r)+r(r_a+l_a) \le (l_a-r)(r_a+l_a)$

$\Leftrightarrow {l_a}^2+rr_a \le {l_a}^2+(r_a-r)l_a-rr_a \Leftrightarrow rr_a \le (r_a-r)l_a-rr_a$

$$\Leftrightarrow l_a \ge \frac{2rr_a}{r_a-r}=\frac{\frac{2\Delta^2}{s(s-a)}}{\Delta(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s})}=\frac{2\Delta}{s-(s-a)}=\frac{2\Delta}{a}=h_a$$

而 $\frac{l_a-r}{r_a+l_a}+\frac{2r}{l_a} \le 1 \Leftrightarrow l_a(l_a-r)+2r(r_a+l_a) \le l_a(l_a+r_a) \Leftrightarrow {l_a}^2+rl_a+2rr_a \le {l_a}^2+r_a l_a$

$\Leftrightarrow rl_a+2rr_a \le r_a l_a \Leftrightarrow (r_a-r)l_a \ge 2rr_a \Leftrightarrow l_a \ge \frac{2rr_a}{r_a-r}=h_a$

又 $\frac{l_a-r}{r_a+l_a}+\frac{2r}{l_a} \ge \frac{h_a}{l_a} \Leftrightarrow l_a(l_a-r)+2r(r_a+l_a) \ge h_a(r_a+l_a)$

$$\Leftrightarrow l_a{}^2+rl_a+2rr_a\ge h_ar_a+h_al_a\Leftrightarrow l_a{}^2+(r-h_a)l_a+2rr_a-h_ar_a\ge 0$$
$$\Leftrightarrow l_a{}^2+(r-h_a)l_a+(r_a-r)h_a-h_ar_a\ge 0\Leftrightarrow l_a{}^2+(r-h_a)l_a-rh_a\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (l_a-h_a)(l_a+r)\ge 0\Leftrightarrow l_a\ge h_a$$

由上面的过程可以发现当$t=1$**时 BG22 与 BG91(a)、(b)等价**!

不难知道: $m_a\ge \dfrac{s(s-a)}{w_a}\ge\sqrt{s(s-a)}\ge w_a\ge r+\dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}\ge h_a,\dfrac{w_a{}^2}{h_a}\ge h_a$**及**$k_a\ge h_a$.

下证$\dfrac{1}{2}(r_b+r_c)\ge h_a$: $\dfrac{1}{2}(r_b+r_c)\ge h_a\Leftrightarrow\dfrac{\Delta}{2}(\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c})\ge\dfrac{2\Delta}{a}$

$$\Leftrightarrow\frac{(s-b)+(s-c)}{2(s-b)(s-c)}\ge\frac{2}{a}\Leftrightarrow a^2\ge 4(s-b)(s-c)\Leftrightarrow[(s-b)-(s-c)]^2\ge 0$$

所以$\dfrac{1}{2}(r_b+r_c)\ge h_a$.

利用锐角三角形中熟知的不等式$m_a\le R(1+\cos A)$**不难证明**: $\dfrac{s(s-a)}{m_a}\le h_a\{\Delta_a\}$.

容易证明当$l_a{}'\ge h_a$**时有**: $2r+r\cdot\dfrac{m_a}{r_a}\ge m_a\ge h_a,2r+r\cdot\dfrac{w_a}{r_a}\ge w_a\ge h_a,2r+r\cdot\dfrac{h_a}{r_a}\ge h_a$.

最后证明当$t=-\dfrac{1}{2},l_a=h_a$**时**, $\dfrac{2}{2^t}\le\left(\dfrac{l_a}{r_a+l_a}\right)^t+\left(\dfrac{r}{l_a-r}\right)^t$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{h_a+r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{h_a-r}{r}}\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{1+\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{h_a}{r}-1}\ge 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\frac{a}{2(s-a)}}+\sqrt{\frac{2s}{a}-1}\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{b+c}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{b+c}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)^2\ge 8 \tag{1}$$

令$\dfrac{b+c}{a}=u$,**则**$u>1$,**从而不等式**(1)

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{u}{u-1}}+\sqrt{u}\right)^2\ge 8\Leftrightarrow\frac{u}{u-1}+u+\frac{2u}{\sqrt{u-1}}\ge 8\Leftrightarrow\frac{u^2}{u-1}+\frac{2u}{\sqrt{u-1}}\ge 8 \tag{2}$$

再令$\dfrac{u}{\sqrt{u-1}}=t(t>0)$,**则不等式**(2)

$$\Leftrightarrow t^2+2t\ge 8\Leftrightarrow t^2+2t-8\ge 0\Leftrightarrow(t+4)(t-2)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2\Leftrightarrow\frac{u}{\sqrt{u-1}}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow u\ge 2\sqrt{u-1}\Leftrightarrow(u-1)-2\sqrt{u-1}+1\ge 0\Leftrightarrow(\sqrt{u-1}-1)^2\ge 0 \tag{3}$$

不等式(3)**显然成立,至此两个规范几何量不等式猜想证毕**.

参考文献

[1] **刘保乾著**.《BOTTEMA,**我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果**》[M].**拉萨**:**西藏人民出版社**,2003 **年** 1 **月**,P232—270.

三角形中 Vasic 不等式的加强

姜卫东
（黑龙江农业经济职业学院 157041）

在 ΔABC 中,设 x,y,z 是任意正数则

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\qquad(1)$$

（1）是 $Vasic$ 在 1969 年获得的一个重要不等式.

本文将（1）加强为:

定理:在 ΔABC 中,设 x,y,z 是任意正数则有

$$x^2\sin^2 A+y^2\sin^2 B+z^2\sin^2 C\le\frac{1}{4}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)^2\qquad(2)$$

证明:

设 ΔABC 的三边长分别为 a,b,c ,由三角形中的射影定理及柯西不等式可得:

$$\begin{aligned}a^2&=(b\cos C+c\cos B)^2\\&\le(x^2y^2\cos^2 C+z^2x^2\cos^2 B)\left(\frac{b^2}{x^2y^2}+\frac{c^2}{x^2z^2}\right)\end{aligned}\qquad(3)$$

$$\therefore x^2y^2\cos^2 C+z^2x^2\cos^2 B\ge\frac{a^2}{\frac{b^2}{x^2y^2}+\frac{c^2}{x^2z^2}}=\frac{\frac{a^2}{x^2}}{\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}}\cdot x^4\qquad(4)$$

同理可得:

$$\therefore x^2y^2\cos^2 C+y^2z^2\cos^2 A\ge\frac{\frac{b^2}{y^2}}{\frac{a^2}{x^2}+\frac{c^2}{z^2}}\cdot y^4\qquad(5)$$

$$\therefore y^2z^2\cos^2 A+z^2x^2\cos^2 B\ge\frac{\frac{c^2}{z^2}}{\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}}\cdot z^4\qquad(6)$$

记 $p=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}$,（4）（5）（6）三式相加,并再次应用柯西不等式可得:

$$2(y^2z^2\cos^2 A+z^2x^2\cos^2 B+x^2y^2\cos^2 C)\ge\frac{\frac{a^2}{x^2}}{\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}}\cdot x^4+\frac{\frac{b^2}{y^2}}{\frac{a^2}{x^2}+\frac{c^2}{z^2}}\cdot y^4+\frac{\frac{c^2}{z^2}}{\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}}\cdot z^4$$

$$=\frac{1}{2}[(p-\frac{a^2}{x^2})+(p-\frac{b^2}{y^2})+(p-\frac{c^2}{z^2})]\cdot[\frac{x^4}{p-\frac{a^2}{x^2}}+\frac{y^4}{p-\frac{b^2}{y^2}}+\frac{z^4}{p-\frac{c^2}{z^2}}]-(x^2+y^2+z^2)$$

$$\geq\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^2-(x^4+y^4+z^4) \qquad (8)$$

由 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$ 等代入（8）整理可得:

$$y^2z^2\sin^2 A+z^2x^2\sin^2 B+z^2x^2\sin^2 C\leq\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^2 \qquad (9)$$

在（9）中作变换:$(yz,zx,xy)\to(x,y,z)$ 即得定理.

$E\left(\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^t\right)=E\left(s^n\right)$ 的证明

林 新 群

（福建省仙游县金石中学 351200）

定理 设 $f_n(t)=\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^t$，（其中 $n\in N^*,t\geq 0$）,有

$$E\left(\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^t\right)=E\left(s^n\right).$$

为了证明定理,先给出三个引理:

引理 1[1] $\sum a^{n+1}\cos^2\frac{B-C}{2}\geq\frac{1}{2}\sum a^n(b+c)\ (n\geq 2)$.

引理 2 $f_n(2t)\geq\frac{f_n^2(t)}{\sum a^n}$.

证明 利用柯西不等式得:

$$f_n(2t)=\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^{2t}=\sum\frac{\left[a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^t\right]^2}{a^n}\geq\frac{\left[\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^t\right]^2}{\sum a^n}=\frac{f_n^2(t)}{\sum a}.$$

引理 3 $f_n\left(2^k\right)>\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\sum a^n$ （其中 $k\in N^*$）. (*)

证明（对 k 进行归纳法证明）首先,由引理 1 得:

$$\sum a^n\left(\frac{h_a}{w_a}\right)^2\geq\frac{1}{2}\sum a^{n-1}(b+c)>\frac{1}{2}\sum a^n \quad （其中 n\in N^*）,$$

即 $f_n(2)>\frac{1}{2}\sum a^n$,故对于 $k=1$,式（*）成立;假设对于 k ,式（*）成立,则对于 $k+1$,利用引理 2 得:

$$f_n\left(2^{k+1}\right)\ge\frac{f_n^{\,2}\left(2^k\right)}{\sum a^n}>\frac{\left(\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\sum a^n\right)^2}{\sum a^n}=\frac{1}{2^{2^k}}\sum a^n\ ,$$

即式（*）也成立,从而对于任意的$k\in N^*$,式（*）恒成立.

定理的证明　对于任意的$t\ge 0$,总存在一个$k\in N^*$,使$t\le 2^k$,由$f_n\left(t\right)$的单调性,及引理 3 得:

$$\sum a^n=f_n\left(0\right)\ge f_n\left(t\right)\ge f_n\left(2^k\right)>\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\sum a^n\ ,$$

即

$$\sum a^n\ge f_n\left(t\right)>\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\sum a^n\ .$$

从而,有

$$E\left(f_n\left(t\right)\right)=E\left(\sum a^n\right)=E\left(s^n\right).$$

定理证毕.

参考文献

[1]褚小光　三角形边与角的两个不等式,研究通讯,中国不等式研究小组主办,1998 年（第 4 期）P32-35.

（证明时间:2003 年 10 月 4 日）

两个轮换对称不等式

褚小光
（浙江奉化华源步云西裤有限公司　　315500）

在文［1］中,西藏刘保乾提出关于三角形边长与中线的两个轮换对称不等式,本文给以证明.

定理　　设a，b，c；m_a，m_b，m_c分别表示△ABC 的三边长和相应的中线,则

$$\frac{8}{5}>\frac{m_c^2}{b^2+c^2}+\frac{m_a^2}{c^2+a^2}+\frac{m_b^2}{a^2+b^2}\ge\frac{9}{8}\tag{1}$$

$$\frac{97+\sqrt{13}}{40}>\frac{m_c^2+m_a^2}{b^2+c^2}+\frac{m_a^2+m_b^2}{c^2+a^2}+\frac{m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{9}{4}\tag{2}$$

证明　　先证（1），（2）的右半边,设 P 是△ABC 平面上任意一点,则不等式（1），（2）右半边可分别推广为

$$\frac{PC^2}{b^2+c^2}+\frac{PA^2}{c^2+a^2}+\frac{PB^2}{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}\tag{3}$$

$$\frac{PC^2+PA^2}{b^2+c^2}+\frac{PA^2+PB^2}{c^2+a^2}+\frac{PB^2+PC^2}{a^2+b^2}\ge 1\tag{4}$$

根据三角形惯性极矩不等式　$x,y,z\in R$

$$\left(x+y+z\right)\left(xPA^2+yPB^2+zPC^2\right)\ge a^2yz+b^2zx+c^2xy\tag{5}$$

在（5）式中取　$x=\dfrac{1}{c^2+a^2}$　　$y=\dfrac{1}{a^2+b^2}$　　$z=\dfrac{1}{b^2+c^2}$　　即得

$$\frac{PA^2}{c^2+a^2}+\frac{PB^2}{a^2+b^2}+\frac{PC^2}{b^2+c^2}\ge\frac{\sum a^4+\sum b^2c^2}{\sum a^4+3\sum b^2c^2} \tag{6}$$

在（5）式中取 $x=\frac{1}{b^2+c^2}$ $y=\frac{1}{c^2+a^2}$ $z=\frac{1}{a^2+b^2}$ 则得

$$\frac{PA^2}{b^2+c^2}+\frac{PB^2}{c^2+a^2}+\frac{PC^2}{a^2+b^2}\ge\frac{2\sum b^2c^2}{\sum a^4+3\sum b^2c^2} \tag{7}$$

欲证（3）式只需证 $\frac{\sum a^4+\sum b^2c^2}{\sum a^4+3\sum b^2c^2}\ge\frac{1}{2}$

化简即得 $\sum a^4\ge\sum b^2c^2$ 上式显然成立

而 $\frac{\sum a^4+\sum b^2c^2}{\sum a^4+3\sum b^2c^2}+\frac{2\sum b^2c^2}{\sum a^4+3\sum b^2c^2}=1$

即不等式（6）+不等式（7），故不等式（3），（4）成立.

再证（1）式左边.（1）式左边等价于

$$\frac{32}{5}\ge\frac{2a^2+2b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+2c^2-a^2}{c^2+a^2}+\frac{2c^2+2a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{64}{5}-\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}\ge3\left[\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{49\prod\left(b^2+c^2\right)-20\left(\sum a^6+\sum a^2\sum b^2c^2\right)}{5\prod\left(b^2+c^2\right)}\ge\frac{3\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)}{\prod\left(b^2+c^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad -20\sum a^6+29\sum a^4\left(b^2+c^2\right)+38a^2b^2c^2\ge15\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right) \tag{8}$$

令 $x=s-a$，$y=s-b$，$z=s-c$ 则 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$

则 $\sum a^6=2\sum x^6+6\sum x^5(y+z)+15\sum x^4\left(y^2+z^2\right)+20\sum y^3z^3$

$$\sum a^4\left(b^2+c^2\right)=2\sum x^6+6\sum x^5(y+z)+9\sum x^4\left(y^2+z^2\right)+8\sum y^3z^3$$
$$+20xyz\sum x^3+28xyz\sum x^2(y+z)+36x^2y^2z^2$$

$$a^2b^2c^2=\sum x^4\left(y^2+z^2\right)+2\sum y^3z^3+2xyz\sum x^3+6xyz\sum x^2(y+z)+10x^2y^2z^2$$

（8）式左边经置换

$$-20\sum a^6+29\sum a^4\left(b^2+c^2\right)+38a^2b^2c^2$$
$$=18\sum x^6+54\sum x^5(y+z)-\sum x^4\left(y^2+z^2\right)-92\sum y^3z^3+656xyz\sum x^3$$
$$+1040xyz\sum x^2(y+z)+1424x^2y^2z^2>0$$

下面仅需对 $a>b>c$ $(x<y<z)$ 情况证明

而 $\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)=2\sum yz^5-2\sum y^5z+5\sum y^2z^4-5\sum y^4z^2$
$$+4xyz\sum yz^2-4xyz\sum y^2z$$

代入整理等价于

$$18\sum x^6+24\left(yz^5+zx^5+xy^5\right)+84\left(y^5z+z^5x+x^5y\right)-76\left(y^2z^4+z^2x^4+x^2y^4\right)$$

$$+74\left(y^4z^2+z^4x^2+x^4y^2\right)-92\sum y^3z^3+656xyz\sum x^3+980xyz\left(yz^2+zx^2+xy^2\right)$$

$$1100xyz\left(y^2z+z^2x+x^2y\right)+1424x^2y^2z^2>0$$

上式约去 2,整理等价于

$$9z^6+12yz^5-38y^2z^4-46y^3z^3+37y^4z^2+42y^5z+9y^6+x\left[9x^5+12zx^4\right.$$

$$+12y^5+42z^5+42x^4y-38z^2x^3-38xy^4+37z^4x+37x^3y^2-46x^2y^3-46x^2z^3$$

$$\left.+328yz\left(x^3+y^3+z^3\right)+490yz\left(yz^2+zx^2+xy^2\right)+550yz\left(y^2z+z^2x+x^2y\right)+712xy^2z^2\right]>0$$

因为 $x<y<z$ **显然上式中括号内大于零,故只需证**

$$9z^6+12yz^5-38y^2z^4-46y^3z^3+37y^4z^2+42y^5z+9y^6\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(3z^3+2yz^2-7y^2z-3y^3\right)^2\geq 0$$

上式显然,故不等式（1）左边获证.

次证（2）式左边,（2）式左边等价于

$$\Leftrightarrow\frac{97+\sqrt{13}}{5}>2\left[\frac{4b^2+a^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{4c^2+a^2+b^2}{c^2+a^2}+\frac{4a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{97+\sqrt{13}}{5}-\sum\frac{5b^2+5c^2+2a^2}{b^2+c^2}>3\left[\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(22+\sqrt{13}\right)\prod\left(b^2+c^2\right)-10\sum a^2\left(a^4+\sum b^2c^2\right)>15\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow -10\sum a^6+\left(12+\sqrt{13}\right)\sum a^4\left(b^2+c^2\right)+\left(14+2\sqrt{13}\right)a^2b^2c^2$$

$$>15\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)\qquad\textbf{(9)}$$

易证（9）式左边为非负,下面仅需对 $a>b>c$ **证明,作置换**

$$\left(4+2\sqrt{13}\right)\sum x^6+\left(12+6\sqrt{13}\right)\sum x^5(y+z)-\left(28-11\sqrt{13}\right)\sum x^4\left(y^2+z^2\right)-\left(76-12\sqrt{13}\right)\sum y^3z^3$$

$$+\left(268+24\sqrt{13}\right)xyz\sum x^3+\left(420+40\sqrt{13}\right)xyz\sum x^2(y+z)+\left(572+56\sqrt{13}\right)x^2y^2z^2$$

$$\geq 30\sum yz^5-30\sum y^5z+75\sum y^2z^4-75\sum y^4z^2+60xyz\sum yz^2-60xyz\sum y^2z$$

$$\Leftrightarrow\left(4+2\sqrt{13}\right)z^6+\left(6\sqrt{13}-18\right)yz^5-\left(103-11\sqrt{13}\right)y^2z^4-\left(76-12\sqrt{13}\right)y^3z^3$$

$$+\left(47+11\sqrt{13}\right)y^4z^2+\left(42+6\sqrt{13}\right)y^5z+\left(4+2\sqrt{13}\right)y^6+x\left[\left(4+2\sqrt{13}\right)x^5+\left(6\sqrt{13}-18\right)\left(x^4z+y^5\right)\right.$$

$$+\left(42+6\sqrt{13}\right)\left(x^4y+z^5\right)-\left(103-11\sqrt{13}\right)\left(x^3z^2+xy^4\right)+\left(47+11\sqrt{13}\right)\left(x^3y^2+xz^4\right)$$

$$-\left(76-12\sqrt{13}\right)\left(x^2y^3+x^2z^3\right)+\left(268+24\sqrt{13}\right)yz\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(360+40\sqrt{13}\right)yz\left(yz^2+zx^2+xy^2\right)$$

$$\left.+\left(480+40\sqrt{13}\right)yz\left(y^2z+z^2x+x^2y\right)+\left(572+56\sqrt{13}\right)xy^2z^2\right]>0$$

因为 $x<y<z$ **,所以上式中括号内显然为零,故只需证.**

$$\left(4+2\sqrt{13}\right)z^6+\left(6\sqrt{13}-18\right)yz^5-\left(103-11\sqrt{13}\right)y^2z^4-\left(76-12\sqrt{13}\right)y^3z^3$$

$$+\left(47+11\sqrt{13}\right)y^4z^2+\left(42+6\sqrt{13}\right)y^5z+\left(4+2\sqrt{13}\right)y^6\geq 0\qquad\textbf{(10)}$$

（10）式两边同乘以 $\left(4+2\sqrt{13}\right)$ **等价于**

$$\left(4+2\sqrt{13}\right)^2z^6+\left(84-12\sqrt{13}\right)yz^5-\left(126+162\sqrt{13}\right)y^2z^4-\left(104\sqrt{13}-8\right)y^3z^3$$

$$\left(474+138\sqrt{13}\right)y^4z^2+\left(324+108\sqrt{13}\right)y^5z+\left(4+2\sqrt{13}\right)^2y^6\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\qquad\left[\left(4+2\sqrt{13}\right)y^3+\left(3\sqrt{13}-9\right)yz^2-\left(21+3\sqrt{13}\right)y^2z-\left(4+2\sqrt{13}\right)y^3\right]^2\geq 0$$

显然（10）式成立,故不等式（2）左边获证,综上,从而定理获证.

不等式（1），（2）的对偶形式为

$$\frac{10}{9} > \frac{c^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{a^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{b^2}{m_a^2+m_b^2} \geq 2 \tag{11}$$

$$\frac{194+2\sqrt{13}}{45} > \frac{c^2+a^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{a^2+b^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2} \geq 4 \tag{12}$$

参考文献

[1] 刘保乾著,《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形不等式研究的新理论、新方法和新结果》,拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月

[研 究 信 息]

1、 设 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点, $R_i=PA_i$， $\angle A_iPA_{i=1}=2a_i$， $t_i=\sqrt{R_iR_{i+1}}\cos a_i$，

当 $\sec^2\frac{p}{n}\geq k\geq 1$ 时,有 $\left(\sum_{i=1}^{n}R_i\right)^2-k\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2\geq\frac{\sec^2\frac{p}{n}-k}{tg^2\frac{p}{n}}s^2$ (1)

2、设 P 为△ABC 内部一动点,P 至 BC,CA,AB 边的距离分别为 r_1， r_2， r_3. 令 $PA=R_1$， $PB=R_2$， $PC=R_3$, 则

1) $\sum R_2R_3-k\sum r_2r_3\geq\frac{4-k}{3}r(4R+r)\qquad(k\geq 1)$ (2)

2) $\left(\sum R_1\right)^2-k\left(\sum r_1\right)^2\geq\frac{4-k}{3}s^2\qquad(4\geq k\geq 1)$ (3)

3) $\sum(R_1+R_2)(R_1+R_3)-k\sum(r_1+r_2)(r_1+r_3)\geq\frac{4-k}{3}\sum bc\qquad(4\geq k\geq 1)$ (4)

4) $\frac{R_2R_3}{a}+\frac{R_3R_1}{b}+\frac{R_1R_2}{c}-k\left(\frac{r_2r_3}{a}+\frac{r_3r_1}{b}+\frac{r_1r_2}{c}\right)\geq\frac{(4-k)}{3}\frac{\Delta}{R}\qquad(k>1)$ (5)

注:不等式（3）可由不等式（1）的特例.（褚小光提出并证明)

[问题与解答]

1、一个不等式的解答

刘健曾证明得到

$$\left(tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leq\frac{1}{8} \tag{1}$$

根据已知恒等式 $$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{s^2-(2R+r)^2}{4R^2} \tag{2}$$

即知 $$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\le\frac{r^2}{2R^2} \tag{3}$$

不等式（3）等价于$Gerretsen$不等式$4R^2+4Rr+3r^2\ge s^2$,根据已知不等式

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\ge tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1 \tag{4}$$

易验证不等式（3）强于不等式（1）,下面给出不等式（3）的加强.

定理 在△ABC 中,有

$$\left(tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\le\frac{r^2}{2R^2} \tag{5}$$

证明 据已知等式 $tg\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，（5）等价于

$$\sum\frac{r^2}{(s-a)^2}\cdot\prod\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\le\frac{r^2}{2R^2}$$

令 $x=s-a$，$y=s-b$，$z=s-c$，即 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$ 则上式等价于

$$\sum\frac{1}{x^2}\cdot\prod[x(x+y+z)-yz]\le 8xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum y^2z^2\cdot\prod\left[x\sum x-yz\right]\le 8x^3y^3z^3\sum x$$

上式展开整理得

$$\sum x^6\left(y^4+z^4\right)+2\sum y^5z^5-2xyz\sum x^5\left(y^2+z^2\right)-2xyz\sum x^4\left(y^3+z^3\right)$$
$$+2x^2y^2z^2\sum x^4+2x^3y^3z^3\sum x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum x^3\left[x^3\left(y^2+z^2\right)+x^2\left(y^3+z^3\right)-y^2z^2\left(y+z\right)\right]\left(y-z\right)^2\ge 0$$

不妨设 $x\le y\le z$ 则易证

$$z^3\left(x^2+y^2\right)+z^2\left(x^3+y^3\right)-x^2y^2(x+y)>0$$
$$y^3\left(z^2+x^2\right)+y^2\left(z^3+x^3\right)-z^2x^2(z+x)>0$$
$$x\le y\ \ (y-z)^2\le(z-x)^2$$

所以欲证（6）式,只需证

$$x^3\left(y^2+z^2\right)+x^2\left(y^3+z^3\right)-y^2z^2(y+z)+y^3\left(z^2+x^2\right)+y^2\left(z^3+x^3\right)-z^2x^2(z+x)>0$$

$$\Leftrightarrow\qquad 2x^2y^2(x+y)>0$$

显然成立,故定理证毕.

（褚小光解答）

2、热点问题 4 的探讨

此问题是:求使

$$(R-\sqrt{2Rr})(a+b+c)\ge k\sum(b-c)^2 \tag{*}$$

恒成立的最大 k 值.(刘保乾提出)

易知（*）$\Leftrightarrow s(R-\sqrt{2Rr})\ge k(s^2-12Rr-3r^2)$,它可化为 $s\le f(R,r)$的形式,于是据文[1]或[2],可作代换:$R=2,\ r=1-x^2,\ s^2=(1-x)(3+x)^3\quad(-1<x\le 0)$

化为 $$k \le \frac{\sqrt{3+x}\,(1-\sqrt{1-x^2})}{2x^2\sqrt{1-x}} = f(x) \qquad (-1<x<0)$$

令$f'(x_0)=0$,**得** $x_0^4+9x_0^3+19x_0^2-9x_0-12=0 \quad (-1<x_0<0)$

从而可求得 $x_0=-0.6677\cdots$,**于是有**

$$f(x)_{\min}=f(x_0)=0.338960884\cdots$$

故使（*）成立的最大 $k=0.338960884\cdots$.（**如何证明它是方程** $27648k^8-795456k^6+95792k^4-556k^2+1=0$ **的根？**）

参 考 文 献

[1] 陈胜利. 证明一类不等式的新方法——等量替换法. 福建中学数学, 1993(3).

[2] 陈胜利. 三元不等式的简化证法综述. 见刘保乾:《BOTTEMA,我们看见了什么》，西藏人民出版社, 2003 年 1 月第一版.

陈胜利（福建省南安市五星中学 362341）

3、一个不等式链的证明

近日西藏刘保乾先生在来信中提出如下的不等式猜想:

$$(b-c)^2 \ge (b^2+c^2)\sin A - 4\Delta \ge (h_b-h_c)^2 \qquad (1)$$

下面给出不等式链(1)的证明

[证明] $(b-c)^2 \ge (b^2+c^2)\sin A - 4\Delta \ge (h_b-h_c)^2$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 \ge (b^2+c^2)\sin A - 2bc\sin A \ge (h_b-h_c)^2$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 \ge (b-c)^2\sin A \ge \left(\frac{b-c}{bc}\right)^2 \cdot 4\Delta^2$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 \ge (b-c)^2\sin A \ge \left(\frac{b-c}{bc}\right)^2 \cdot b^2c^2\sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 \ge (b-c)^2\sin A \ge (b-c)^2\sin^2 A \qquad (2)$$

因为$1\ge \sin A \ge \sin^2 A$,所以不等式链(2)显然成立,从而不等式链(1)得证.

（吴裕东,浙江省新昌中学 312500）

4、BW81 的证明

西藏刘保乾先生在文[1]提出了如下完全对称不等式猜想:

BW81 $\frac{r}{R}s^2 \ge \sum \sin\frac{A}{2}h_a^2$

下面给出 BW81 的证明.

[证明] $\frac{r}{R}s^2 \ge \sum \sin\frac{A}{2}h_a^2 \Leftrightarrow \frac{r}{R}s^2 \ge 4\Delta^2\sum\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a^2\sqrt{bc}}$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R}s^2 \ge 4r^2s^2\sum\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a^2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow 1 \ge 4Rr\sum\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{a^2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

易知$\sqrt{(s-b)(s-c)} \le \frac{(s-b)+(s-c)}{2} = \frac{a}{2}$;

$$\sqrt{(s-c)(s-a)} \le \frac{(s-c)+(s-a)}{2} = \frac{b}{2};$$

$$\sqrt{(s-a)(s-b)} \le \frac{(s-a)+(s-b)}{2} = \frac{c}{2}.$$

所以欲证不等式(1)只需证更强式: $1 \ge 4Rr\sum\frac{a}{2a^2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow 1 \ge 2Rr\sum\frac{1}{a\sqrt{bc}}$

$$\Leftrightarrow 1 \ge \frac{2Rr}{abc}\sum\sqrt{bc} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{2Rr}{4Rrs}\sum\sqrt{bc} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{2s}\sum\sqrt{bc} \Leftrightarrow 2s \ge \sum\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow \sum a \ge \sum\sqrt{bc} \qquad (2)$$

不等式(2)显然成立,所以不等式(1)得证,即 BW81 获证.

参考文献

[1] 刘保乾著.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P372.

（吴裕东 浙江省新昌中学 312500）

5、BG69 的证明

西藏刘保乾先生在文[1]提出了如下的规范几何量不等式猜想:

BG69 $$\frac{r_a}{l_a+r_a} \ge \frac{(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}{(l_a-r)(1+\sin\frac{A}{2})+(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}} \ge \sin\frac{A}{2}$$

$l_a = w_a; l_a = \sqrt{s(s-a)}.$

下面给出 BG69 的证明.

[证明] 为了方便,我们记 $d = \sin\frac{A}{2}, x = \cos\frac{B-C}{2}$,则 $d < x \le 1$.

(i) 当 $l_a = w_a$ 时,则根据文[3]易得: $\frac{w_a+r_a}{w_a} = 1+\frac{dx}{x-d}$, $\frac{r_a}{w_a+r_a} = \frac{dx}{(1+d)x-d}$

及 $\frac{w_a-r}{w_a} = 1-\frac{dx}{x+d}$.

先证左边的不等式.

$$\frac{r_a}{w_a+r_a} \ge \frac{(w_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}{(w_a-r)(1+\sin\frac{A}{2})+(w_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_a}{w_a+r_a} \ge \frac{\frac{w_a+r_a}{w_a}\sin\frac{A}{2}}{\frac{w_a-r}{w_a}(1+\sin\frac{A}{2})+\frac{w_a+r_a}{w_a}\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{(1+d)x-d} \ge \frac{(1+\frac{dx}{x-d})d}{(1-\frac{dx}{x+d})(1+d)+(1+\frac{dx}{x-d})d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{(1+d)x-d} - \frac{(1+\frac{dx}{x-d})d}{(1-\frac{dx}{x+d})(1+d)+(1+\frac{dx}{x-d})d} >= 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2(x-d)(1-x)[(1+d)x+d]}{[(1+d)x-d][(1+d)x^2+d^2(1+2d)x-d^2(1+2d)]} \ge 0 \qquad (1)$$

不等式(1)**显然成立,故当**$l_a = w_a$ **时左边的不等式获证**.

再证右边的不等式.

$$\frac{(w_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}{(w_a-r)(1+\sin\frac{A}{2})+(w_a+r_a)\sin\frac{A}{2}} \ge \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{(1+\frac{dx}{x-d})d}{(1-\frac{dx}{x+d})(1+d)+(1+\frac{dx}{x-d})d} \ge d$$

$$\Leftrightarrow \frac{2d^4(1-x)}{(1+d)x^2+d^2(1+2d)x-d^2(1+2d)} \ge 0 \qquad (2)$$

不等式(2)**显然成立,故当**$l_a = w_a$ **时右边的不等式获证,即当**$l_a = w_a$ **时该规范几何量不等式成立**.

(ii) **因为** $\dfrac{r_a}{l_a+r_a} \ge \dfrac{(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}{(l_a-r)(1+\sin\frac{A}{2})+(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{r_a}{l_a+r_a} - \frac{(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}}{(l_a-r)(1+\sin\frac{A}{2})+(l_a+r_a)\sin\frac{A}{2}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-dl_a{}^2+r_al_a-(1+d)rr_a}{(l_a+r_a)[(1+2d)l_a+dr_a-(1+d)r]} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -dl_a{}^2+r_al_a-(1+d)rr_a \ge 0 \Leftrightarrow dl_a{}^2-r_al_a+(1+d)rr_a \le 0$$

所以当$l_a = \sqrt{s(s-a)}$ **时,左边的不等式**

$$\Leftrightarrow ds(s-a)-r_a\sqrt{s(s-a)}+(1+d)rr_a \le 0 \Leftrightarrow ds(s-a)-\frac{\Delta}{s-a}\sqrt{s(s-a)}+(1+d)\frac{\Delta^2}{s(s-a)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow ds(s-a)-s\sqrt{(s-b)(s-c)}+(1+d)(s-b)(s-c) \le 0$$

$$\Leftrightarrow ds(s-a)+(1+d)(s-b)(s-c) \le s\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

$$\Leftrightarrow [ds(s-a)+(1+d)(s-b)(s-c)]^2 \le s^2(s-b)(s-c) \qquad (3)$$

根据文[3]**不难知不等式**(3)

$$\Leftrightarrow [4R^2d(1-d^2)(x^2-d^2)+4R^2d^2(1+d)(x^2-d^2)]^2 \le 16R^4d^2(1-d^2)(x^2-d^2)\cdot(x+d)^2$$

$$\Leftrightarrow 16R^4d^2(1+d)^2(x^2-d^2)^2 \le 16R^4d^2(1-d^2)(x^2-d^2)(x+d)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+d)^2(x^2-d^2) \le (1-d^2)(x+d)^2 \Leftrightarrow (1+d)(x-d) \le (1-d)(x+d)$$

$$\Leftrightarrow (1+d)x-d(1+d) \le (1-d)x+d(1-d) \Leftrightarrow 2dx \le 2d \Leftrightarrow x \le 1$$

故当$l_a=\sqrt{s(s-a)}$**时,左边的不等式成立**.

又因为$\dfrac{(l_a+r_a)\sin\dfrac{A}{2}}{(l_a-r)(1+\sin\dfrac{A}{2})+(l_a+r_a)\sin\dfrac{A}{2}}\ge\sin\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{(l_a+r_a)\sin\dfrac{A}{2}}{(l_a-r)(1+\sin\dfrac{A}{2})+(l_a+r_a)\sin\dfrac{A}{2}}-\sin\frac{A}{2}\ge 0\Leftrightarrow\frac{d(1+d)r+d(1-d)r_a-2d^2l_a}{(1+2d)l_a+dr_a-(1+d)r}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow d(1+d)r+d(1-d)r_a-2d^2l_a\ge 0\Leftrightarrow(1+d)r+(1-d)r_a-2dl_a\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(1+d)r+(1-d)r_a\ge 2dl_a\Leftrightarrow[(1+d)r+(1-d)r_a]^2\ge 4d^2l_a^2$$

所以当$l_a=\sqrt{s(s-a)}$**时,右边的不等式**

$$\Leftrightarrow[(1+d)r+(1-d)r_a]^2\ge 4d^2s(s-a)\qquad(4)$$

根据文[3]**不难知不等式**(4)

$$\Leftrightarrow[2Rd(1+d)(x-d)+2Rd(1-d)(x+d)]^2\ge 4R^2d^2(1-d^2)(x^2-d^2)$$

$$\Leftrightarrow 4R^2d^2[(1+d)(x-d)+(1-d)(x+d)]^2\ge 4R^2d^2(1-d^2)(x^2-d^2)$$

$$\Leftrightarrow[2x-2d^2]^2\ge(1-d^2)(x^2-d^2)\Leftrightarrow[2x-2d^2]^2-(1-d^2)(x^2-d^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(d^2+3)x^2-8d^2x+d^2(3d^2+1)\ge 0\qquad(5)$$

不等式(5)**的判别式**$\Delta=-12d^2(1+d)^2(1-d)^2<0$，**所以不等式**(5)**显然成立，故当**$l_a=\sqrt{s(s-a)}$**时右边的不等式获证,即当**$l_a=\sqrt{s(s-a)}$**时该规范几何量不等式成立**.

综上可知 BG69 获证.

参考文献

[1] **刘保乾著**.《BOTTEMA,**我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果**》[M].**拉萨:西藏人民出版社**,2003 **年** 1 **月**,P260.

[2] 张小明.三角形不等式的"B—C"证法.不等式研究(杨学枝主编)[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.6,P9—14.

[3] 阙浩涛."$\dfrac{B-C}{2}$证法"的相关恒等式及应用.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》(刘保乾著)[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P512—522.

(吴裕东、浙江省新昌中学 312500)

6、LBQ71 的修正及证明

西藏刘保乾先生在文[1]**提出如下猜想**:

LBQ71 $\sum h_a\le s+r(3-6\sqrt{3})+\dfrac{r^2}{R}(12+6\sqrt{3})$

安徽张维进老师在文[2]**否定了 LBQ71.经过探索发现 LBQ71 可以修正为**:

$$\sum h_a\le s+3r+(12-6\sqrt{3})\frac{r^2}{R}\qquad(1)$$

下面给出不等式(1)**的证明**.

[证明] 不等式(1)$\Leftrightarrow 2\Delta\sum\frac{1}{a}\le s+3r+(12-6\sqrt{3})\frac{r^2}{R}$

$$\Leftrightarrow 2\Delta\frac{\sum bc}{\prod a}\le s+3r+(12-6\sqrt{3})\frac{r^2}{R}\Leftrightarrow\frac{2rs}{4Rrs}(s^2+4Rr+r^2)\le s+3r+(12-6\sqrt{3})\frac{r^2}{R}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2R}(s^2+4Rr+r^2)\le s+3r+(12-6\sqrt{3})\frac{r^2}{R}$$

$$\Leftrightarrow s^2+4Rr+r^2\le 2Rs+6Rr+(24-12\sqrt{3})r^2\Leftrightarrow s^2\le 2Rs+2Rr+(23-12\sqrt{3})r^2 \qquad (2)$$

不等式(2)可化为$s\le f(R,r)$的形式,于是根据文[3]可作代换:

$$R=2,r=1-x^2,s=\sqrt{(1-x)(3+x)^3}\,(-1<x\le 0).$$

从而不等式(2)

$$\Leftrightarrow (1-x)(3+x)^3\le 4\sqrt{(1-x)(3+x)^3}+4(1-x^2)+(23-12\sqrt{3})(1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow(-24+12\sqrt{3})x^4-8x^3+(32-24\sqrt{3})x^2+12\sqrt{3}\le 4\sqrt{(1-x)(3+x)^3}$$

$$\Leftrightarrow 16(1-x)(3+x)^3-[(-24+12\sqrt{3})x^4-8x^3+(32-24\sqrt{3})x^2+12\sqrt{3}]^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 16(1-x)(1+x)^2x^2[(63-36\sqrt{3})x^3+(24\sqrt{3}-39)x^2+(60\sqrt{3}-98)x+90-48\sqrt{3}]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(63-36\sqrt{3})x^3+(24\sqrt{3}-39)x^2+(60\sqrt{3}-98)x+90-48\sqrt{3}\ge 0 \qquad (3)$$

令$f(x)=(63-36\sqrt{3})x^3+(24\sqrt{3}-39)x^2+(60\sqrt{3}-98)x+90-48\sqrt{3}(-1<x\le 0)$.则欲证不等式(3)只需证: $f(x)\ge 0,(-1<x\le 0)$,容易得到:

$$f'(x)=27(7-4\sqrt{3})x^2+6(8\sqrt{3}-13)x+60\sqrt{3}-98,$$

而 $36(8\sqrt{3}-13)^2-108(7-4\sqrt{3})(60\sqrt{3}-98)=164844-95184\sqrt{3}<0$,且$27(7-4\sqrt{3})>0$,所以$f'(x)>0$,从而$f$在区间$(-1,0]$上严格单调递增,所以

$$f(x)\ge f(-1)=86-48\sqrt{3}>0$$

从而不等式(3)成立,进而可知不等式(1)成立.

参考文献

[1] 刘保乾.110 个有趣的不等式问题.不等式研究(杨学枝主编).拉萨:西藏人民出版社.2000.6,P399.
[2] 张维进.对两道猜想的否定.不等式研究通讯.2003 年第 1 期.P30—32.
[3] 陈胜利.三角形不等式的简化证法.不等式研究(杨学枝主编).拉萨:西藏人民出版社.2000.6,P3—8.

（吴裕东、浙江省新昌中学 312500）

7、利用函数单调性证一个规范几何量不等式

西藏刘保乾先生于 2003 年 7 月 13 日在中国不等式研究小组的网站(http://zgbdsyjxz.nease.net/yx/43.doc)中提出如下的一个规范几何量不等式猜想:

在△ABC 中,设e_a的规范值为$\frac{1}{2}$,则有不等式

$$\frac{1}{2}\left(e_a+\frac{1}{e_a}\right)\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

其中$e_a=\dfrac{a}{b+c},\sin\dfrac{A}{2},\dfrac{r}{w_a-r},\dfrac{r_a}{w_a+r_a}$.

下面给出这个猜想的证明.

[证明] 容易知道函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x})$ 在区间$(0,1]$ 上单调递减.利用张小明老师在文[1]提出的“B—C法”不难证明$1>\dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{r_a}{w_a+r_a}\ge\sin\dfrac{A}{2}\ge\dfrac{r}{w_a-r}>0$,所以

$$f(\frac{a}{b+c})\le f(\frac{r_a}{w_a+r_a})\le f(\sin\frac{A}{2})\le f(\frac{r}{w_a-r}).$$

因而欲证上述规范几何量不等式只需证:

$$f(\frac{a}{b+c})\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a})\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(1)$$

为了方便,我们记$d=\sin\dfrac{A}{2},x=\cos\dfrac{B-C}{2}$,则$0<d<x\le1$.

由文[2]不难知道不等式(1)

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\frac{d}{x}+\frac{x}{d})\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}(x-d)\Leftrightarrow\frac{1}{2}[\frac{d^2+x^2}{dx}-(x-d)]\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d^2+x^2}{dx}-(x-d)\ge2(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})\Leftrightarrow\frac{(1-d)x^2+d^2x+d^2}{dx}\ge2(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow(1-d)x^2+d^2x+d^2\ge2dx(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow[(1-d)x^2+d^2x+d^2]^2\ge4d^2x^2(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow[(1-d)x^2+d^2x+d^2]^2\ge4d^2x^2(1+x)(1-d)$$

$$\Leftrightarrow[(1-d)x^2+d^2x+d^2]^2-4d^2x^2(1+x)(1-d)\ge0\Leftrightarrow(x+d)^2[(1-d)x-d]^2\ge0\quad(2)$$

不等式(2)显然成立,从而该规范几何量不等式得证.

参考文献

[1] 张小明.三角形不等式的"B—C"证法.不等式研究(杨学枝主编)[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.6,P9—14.

[2] 阚浩涛.“$(B-C)/2$证法”的相关恒等式及应用.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》(刘保乾著)[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P512—522.

（吴裕东、浙江省新昌中学 312500）

8、BF146 的证明

西藏刘保乾先生在文[1]提出了如下的非对称不等式猜想:

$$\textbf{BF146}\quad 1\ge\frac{1}{4}\left(\frac{h_b^{\,t}+h_c^{\,t}}{r_a^{\,t}}\right)+\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^t\qquad(*)$$

当$t=1$时成立; 当$t=-1$时反向成立.

下面给出 BF146 的证明.

[证明] 为了方便,我们记$d=\sin\frac{A}{2}, x=\cos\frac{B-C}{2}$,则$0<d<x\le 1$.

先证当$t=1$时不等式(∗)成立.

$$1\ge\frac{1}{4}\left(\frac{h_b+h_c}{r_a}\right)+\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow 1\ge\frac{(b+c)(b+c-a)}{4bc}+\sin\frac{A}{2} \qquad (1)$$

由文[3]我们不难知道不等式(1)

$$\Leftrightarrow 1\ge\frac{(1-d^2)x}{x+d}+d\Leftrightarrow x+d\ge(1-d^2)x+d(x+d)\Leftrightarrow d\ge d(d-1)x+d^2$$

$$\Leftrightarrow d(1-d)(1-x)\ge 0 \qquad (2)$$

因为$d<x\le 1$,所以不等式(2)显然成立,从而当$t=1$时不等式(∗)成立.

再证当$t=-1$时不等式(∗)反向成立.

$$1\le\frac{1}{4}\left(\frac{h_b^{-1}+h_c^{-1}}{r_a^{-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow 1\le\frac{b+c}{4(b+c-a)}+\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{4(1-\frac{a}{b+c})}+\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}} \qquad (3)$$

由文[3]我们不难知道不等式(3)

$$\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{4(1-\frac{d}{x})}+\frac{1}{4d}\Leftrightarrow 4\le\frac{x}{x-d}+\frac{1}{d}\Leftrightarrow 4d(x-d)\le dx+x-d$$

$$\Leftrightarrow(1-3d)x\ge d-4d^2 \qquad (4)$$

当$1-3d=0$即当$d=\frac{1}{3}$时,不等式(4)显然成立.

当$1-3d>0$即当$0<d<\frac{1}{3}$时,欲证不等式(4)只需证

$$(1-3d)d\ge d-4d^2\Leftrightarrow d^2\ge 0 \qquad (5)$$

不等式(5)显然成立,所以此时不等式(4)成立.

当$1-3d<0$即当$\frac{1}{3}<d<x$时,欲证不等式(4)只需证

$$1-3d\ge d-4d^2\Leftrightarrow 4d^2-4d+1\ge 0\Leftrightarrow(2d-1)^2\ge 0 \qquad (6)$$

不等式(6)显然成立,所以此时不等式(4)成立.

这样当$t=-1$时不等式(∗)反向成立. 综上可知 BF146 获证.

参考文献

[1] 刘保乾著.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P311.

[2] 张小明.三角形不等式的"B—C"证法.不等式研究(杨学枝主编)[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.6,P9—14.

[3] 阙浩涛. "$(B-C)/2$ 证法"的相关恒等式及应用.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》(刘保乾著)[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P512—522.

(吴裕东、浙江省新昌中学 312500)

9、一个不等式问题的探讨

西藏刘保乾先生于 2003 年 7 月 20 日在中国不等式研究小组的网站中提出如下的不等式问题:

近日,笔者偶然发现不等式

$$1-\sin B\sin C \ge \left(\frac{a}{b+c}\right)^2$$

据这个不等式进一步用 B-C 法证明了

$$\cos^2\frac{A}{2}-\sin B\sin C \ge \left(\frac{a}{b+c}\right)^i-\sin^i\frac{A}{2}(i=1,2)$$

设 $\cos^2\frac{A}{2}-\sin B\sin C \ge f(t)\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^t-\sin^t\frac{A}{2}\right)$,则用 BOTTEMA 软件易发现

$f(3)=\frac{2}{3},f(4)=\frac{1}{2},f(6)=\frac{1}{3}$.

(a) 试给出以上结论的直接推理证明;

(b) 对 $t=5$,试确定 $f(t)$;

(c) 如果把 $f(t)$ 看成一个数列,试确定这个数列的通项.

经过探索发现,我们可以建立如下的

定理 当 $t\ge 2$ 时,在 ΔABC 中有 $\cos^2\frac{A}{2}-\sin B\sin C \ge \frac{2}{t}\cdot\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^t-\sin^t\frac{A}{2}\right)$.

下面给出这个定理的证明.

[证明] 为了方便,我们记 $d=\sin\frac{A}{2},x=\cos\frac{B-C}{2}$,则 $0<d<x\le 1$.由阙浩涛老师在文[2]得到的相关结果,我们不难得到

$$\cos^2\frac{A}{2}-\sin B\sin C \ge \frac{2}{t}\cdot\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^t-\sin^t\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 \ge \frac{2}{t}\cdot(\frac{d}{x})^t(1-x^t) \Leftrightarrow tx^t(1-x^2)\ge 2d^t(1-x^t)$$

$$\Leftarrow td^t(1-x^2)\ge 2d^t(1-x^t) \Leftrightarrow t(1-x^2)\ge 2(1-x^t) \Leftrightarrow t(1-x^2)-2(1-x^t)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^t-tx^2+t-2\ge 0 \tag{1}$$

令 $h(t)=2x^t-tx^2+t-2,(0<x\le 1,t\ge 2)$,则欲证不等式(1)只需证 $h(t)\ge 0$.

$$h'(x)=2tx^{t-1}-2tx=2tx(x^{t-2}-1)\le 0$$

即函数 h 在区间 $(0,1]$ 上单调递减,从而 $h(t)\ge h(1)=2-t+t-2=0$,即不等式(1)得证,进而定理获证.

然而困难的是: 当 $0<t<2$ 时 $f(t)$ 的表达式是什么呢?

利用 BOTTEMA 软件可以求得当 $t=\frac{1}{2}$ 时,可以求得使不等式

$$\cos^2\frac{A}{2}-\sin B\sin C\ge k\cdot\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{1}{2}}-\sin^{\frac{1}{2}}\frac{A}{2}\right)$$

成立的k的最佳值为方程$256k^5+768k^4-4016k^3-5456k^2-3717k-960=0$位于区间$(1,\frac{18}{5})$上的根.

我们希望看到这个问题的彻底解决.

参考文献

[1] 张小明.三角形不等式的"B—C"证法.不等式研究(杨学枝主编)[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.6,P9—14.

[2] 阙浩涛."$\frac{B-C}{2}$证法"的相关恒等式及应用.《BOTTEMA,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果》(刘保乾著)[M].拉萨:西藏人民出版社,2003 年 1 月,P512—522.

（吴裕东、浙江省新昌中学 312500）

10、两个涉及指数的非对称不等式猜想的证明

西藏刘保乾先生在文[1]提出了如下的非对称不等式猜想:

BF13 $2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^t+3\left(\sqrt{\frac{s}{3(s-a)}}\right)^t\ge 5$ (t为正整数)

BF123 $r_a{}^t+2h_a{}^t\ge 3(3r)^t\ (t\in N)$

下面给出这两个非对称不等式猜想的证明.

[证明] 事实上我们可以证明当$t\ge 0$时,上述两个非对称不等式猜想成立.

先证 **BF13**.

$$2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^t+3\left(\sqrt{\frac{s}{3(s-a)}}\right)^t\ge 5\Leftrightarrow 2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^t+3\left(\sqrt{\frac{b+c+a}{3(b+c-a)}}\right)^t\ge 5$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^t+3\left(\sqrt{\frac{\frac{b+c}{a}+1}{3(\frac{b+c}{a}-1)}}\right)^t\ge 5 \qquad (1)$$

令$\frac{b+c}{a}=u$,则$u>1$,从而不等式(1) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{2}\right)^t+3\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{t}{2}}\ge 5$ (2)

而由均值不等式易得:

$$2\left(\frac{u}{2}\right)^t+3\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{t}{2}}=\left(\frac{u}{2}\right)^t+\left(\frac{u}{2}\right)^t+\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{t}{2}}$$

$$\ge 5\sqrt[5]{\left(\frac{u}{2}\right)^{2t}\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^{\frac{3t}{2}}}=5\left(\frac{u^2(u+1)^{\frac{3}{2}}}{12\sqrt{3}(u-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{t}{5}} \qquad (3)$$

因为$u>1,t\ge 0$ **,所以欲证不等式**(3)**只需证**

$$\frac{u^2(u+1)^{\frac{3}{2}}}{12\sqrt{3}(u-1)^{\frac{3}{2}}}\ge 1\Leftrightarrow\left(\frac{u^2(u+1)^{\frac{3}{2}}}{12\sqrt{3}(u-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^2\ge 1\Leftrightarrow\frac{u^4(u+1)^3}{432(u-1)^3}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow u^4(u+1)^3-432(u-1)^3\ge 0\Leftrightarrow(u-2)^2(u^5+7u^4+27u^3+81u^2-216u+108)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow u^5+7u^4+27u^3+81u^2-216u+108\ge 0 \qquad (4)$$

令 $f(u)=u^5+7u^4+27u^3+81u^2-216u+108(u>1)$ **,下证** $f(u)\ge 0(u>1)$ **.容易得到** $f'(u)=5u^4+28u^3+81u^2+162u-216>f'(1)=60>0$

所以 f **在区间**$(1,+\infty)$ **上严格单调递增,所以当**$u>1$**时** $f(u)>f(1)=8>0$ **,即不等式**(4)**获证,从而 BF13 获证**.

再证 BF123.

$$r_a{}^t+2h_a{}^t\ge 3(3r)^t\Leftrightarrow\left(\frac{r_a}{3r}\right)^t+2\left(\frac{h_a}{3r}\right)^t\ge 3\Leftrightarrow\left(\frac{s}{3(s-a)}\right)^t+2\left(\frac{2s}{3a}\right)^t\ge 3$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b+c+a}{3(b+c-a)}\right)^t+2\left(\frac{a+b+c}{a}\right)^t\ge 3\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{b+c}{a}+1}{3(\frac{b+c}{a}-1)}\right)^t+2\left(\frac{1}{3}+\frac{b+c}{3a}\right)^t\ge 3 \qquad (5)$$

令$\frac{b+c}{a}=u$ **,则**$u>1$**,从而不等式**(5) $\Leftrightarrow\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^t+2\left(\frac{u+1}{3}\right)^t\ge 3$ (6)

而由均值不等式易得:

$$\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^t+2\left(\frac{u+1}{3}\right)^t=\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^t+\left(\frac{u+1}{3}\right)^t+\left(\frac{u+1}{3}\right)^t$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{u+1}{3(u-1)}\right)^t\left(\frac{u+1}{3}\right)^{2t}}=3\left[\frac{(u+1)^3}{27(u-1)}\right]^{\frac{t}{3}}$$

因此,所以欲证不等式(6)**只需证**

$$\frac{(u+1)^3}{27(u-1)}\ge 1\Leftrightarrow(u+1)^3\ge 27(u-1)\Leftrightarrow(u+1)^3-27(u-1)\ge 0\Leftrightarrow(u-2)^2(u+7)\ge 0$$

上式显然成立,从而 BF123 获证.

参考文献

[1] **刘保乾著**.《BOTTEMA,**我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果**》[M].**拉萨**:**西藏人民出版社**,2003 **年** 1 **月**.P.320-318.

(吴裕东、浙江省新昌中学 312500)

近期网上论坛热点

近期网上讨论日趋活跃,现将有关情况收集整理,供大家（尤其是还没有上网的同仁）参考.本文由刘保乾编辑整理,但很多材料其实是石焕南教师及时收集的(感谢石老师及时收藏有关留言,否则这些珍珠很可能会成为记忆以外的东西)

(一)

杨路教师2003年9月21日在论坛讲了一段话,现摘录如下:

不等式的本质是‘实代数几何”,而不仅是倒腾‘几何-算术平均不等式”一类的工具. 希尔倍特(Hilbert)提出的23个问题之一是: 任何一个正定的多元多项式都可以表成若干有理分式的平方和(这一猜想已被证明).但一般说来还未见有效的算法. 这就是说,一个正定的多元多项式不一定可以表成多项式的平方和,所以普通的“配方法”不是万能的.

过去有人向我提过一个问题: 多项式 $x^2y^2(x^2+y^2-1)+1$ 能否表成实系数多项式的平方和? 要么表示出来,要么证明不能表. 这个问题难度怎么样? 大家不妨试试. 这显然是一个正定的多项式.

或者,谁愿意举出任何一个这样的多项式,它是正定的,但却不能表成多项式的平方和?

针对此,浙江的吴裕东先生给出了一个分拆式:

$$x^2y^2(x^2+y^2-1)+1=x^4y^2+x^2y^4+1-3x^2y^2+2x^2y^2$$

$$=(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1)[(\sqrt[3]{x^4y^2})^2+(\sqrt[3]{x^2y^4})^2+1-\sqrt[3]{x^4y^2}-\sqrt[3]{x^2y^4}-x^2y^2]+2x^2y^2$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1)[(\sqrt[3]{x^4y^2}-\sqrt[3]{x^2y^4})^2+(\sqrt[3]{x^4y^2}-1)^2+(\sqrt[3]{x^2y^4}-1)^2]+2x^2y^2$$

$$=[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1})]^2[(\sqrt[3]{x^4y^2}-\sqrt[3]{x^2y^4})^2+(\sqrt[3]{x^4y^2}-1)^2+(\sqrt[3]{x^2y^4}-1)^2]+2x^2y^2$$

$$=[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1})(\sqrt[3]{x^4y^2}-\sqrt[3]{x^2y^4})]^2+[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1})(\sqrt[3]{x^4y^2}-1)]^2$$

$$[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+1})(\sqrt[3]{x^2y^4}-1)]^2+(\sqrt{2}xy)^2$$

但杨路老师认为吴裕东先生的解答虽然‘很有技巧,但不大合要求.因为把它表成了根式的平方和,而要求是表成多项式的平方和”.

与此同时,西藏刘保乾根据杨路老师的问题,提供了他曾得到的一个恒等式:

$$s^2-16Rr+5r^2=\frac{1}{4}\frac{(3a-b-c)^2(b-c)^2}{a^2}+r^2\left(\frac{b+c}{a}-2\right)^2$$

杨路老师根据这个恒等式发现了下面的多项式：

$$f=x^6-x^4y^2-x^4z^2-x^2y^4+3x^2y^2z^2-x^2z^4+y^6-y^4z^2-y^2z^4+z^6$$

可以表成四个有理分式的平方和:

$$f=r1^2+r2^2+r3^2+r4^2$$

其中： $r1=\dfrac{x(y^2+z^2-x^2)(y^2-z^2)}{y^2+z^2}$, $r2=\dfrac{y(y^2+z^2-x^2)(y^2-z^2)}{y^2+z^2}$,

$r3=\dfrac{z(y^2+z^2-x^2)(y^2-z^2)}{y^2+z^2}$, $r4=\dfrac{xyz(2x^2-y^2-z^2)}{y^2+z^2}$.

杨路老师说:但仍不知 f 是否可以表成多项式的平方和？

姚勇发现, $x^2y^2(x^2+y^2-1)+1$ 可拆分为:

$$x^2y^2(x^2+y^2-1)+1=r1^2+r2^2+r3^2+r4^2$$

$$r1=\frac{x^3y^2+x^3y-x}{x^2+1},\quad r2=\frac{y^2x^2-x^4y-1}{x^2+1},$$

$$r3=\frac{y^2x^2-\sqrt{3}\,xy-x^2}{x^2+1},\quad r4=\frac{\sqrt{3}\,x^2y+xy^2-x}{x^2+1}.$$

并且说不能表示为多项式的平方和.

因为这个讨论刚开始不久,以上讨论尚不能反映问题的全貌,我们期待着下文.

（二）

近期讨论的另一个热点仍是几何凸函数——这个一开始引起争议后来似乎被大家认可又引起争议的热门研究话题,仅从它的受争议和受关心程度来看,这也是很少有的现象.我们以现有的论坛贴子（部分）,来真实地反映争论的焦点以及争论的程度.我们以为,这些资料是珍贵的,不亚于一篇有价值的论文.

☆我认为,除了正三角形之外,三角形的最大内切椭圆不是内切圆,而是经过该三角形三边中点又在三中点处与三边相切的那个椭圆.这椭圆的中心是该三角形的重心. 换句话说:如果一个仿射变换把这个三角形变成正三角形,则其最大内切椭圆即随之变为正三角形的内切圆. - 杨 路 : 2003-09-03 05:54PM

☆没有价值,但有方法论的意义.因为凸函数有什么性质,几何凸函数一定有一个类似的性质,它们之间存在一种同构关系.另外,你的那篇凸文章中的函数说法有误,"f(x)"是函数值,"f"才是函数.萧: 2003-05-31 01:42PM

☆我认为,例如所有的上凸函数对于加法是交换半群,而非群,如果把所有的上凸函数和下凸函数作为集合,显然对于任意的定义域可以构造一上凸函数和下凸函数,其和函数既非上凸也非下凸,所以您所说的凸函数一定不是群,因此凸函数与几何凸函数之间根本不存在同态,更不存在同构.所以研究几何凸函数可能仍然有价值！？请您批评指正！留言人: yang_dinghua 2003-05-31 05:37PM

☆我说"没有价值"可能太武断."同构"也只是借用的一个概念,不是群意义下的同构,有如等差数列和等比数列一样,除了后者的求和性质外,它们其余的性质都是类似的,将前者的性质中加法和乘法分别改为乘法和乘方,就成为后者的性质."凸函数"和"几何凸函数"也一样,如,凸函数有一个和控制不等式,几何凸函数就有一个积控制不等式.因此,我的意思是研究单个几何凸函数的性质没有意义.但研究若干几何凸函数的和的性质,则还是有意义的.不知答复是否清楚. 萧振纲: 1231bq123 2003-05-31 08:23PM

☆振刚老师:您好！恐怕我还是不赞成您的观点,用等差数列和等比数列的关系来比喻"凸函数"和"几何凸函数"的关系是不妥的,对等比数列每一项取对数即成为等差数列,而对 "几何凸函数"取对数许多老师都认为得到"凸函数",这是一个显然的大错误！不可否认"凸函数"和"几何凸函数"有很多类似之处,但也有许多不同之处.试举两例（已发 E-mail 请保乾老师挂在论文选读上）,以显示"凸函数"和"几何凸函数"的差别和"几何凸函数"的威力！杨定华 2003-06-01 02:06AM

☆我认为几何凸函数在方法论绝对有用,在性质上,在对应的前提下,可能会多一二个性质,我的第二篇关于几何凸的文章已开始动笔,当然要看各位老师专家的意见,是否有必要写第三篇.现在不争论这一些.zjzxm888 2003-06-01 05:29AM

☆定华: 你好！我看到,你最近对几何凸函数有兴趣,我观点是:几何凸函数与凸函数之间存在同构关系,也就是说所有关于凸函数的性质可移植到几何凸函数,但这并不否定它的研究价值,因为函数有许多性质在凸函数中不容易表现出来（隐藏）,或者表现得不彻底,但在几何凸函数中却能够充分展现给我们,使我们可挖掘出更多有用的东西.

另外,我认为几何凸函数与凸函数类比等比数列与等差数列也是可以接受的.等比数列与等差数列在研究数列中各自发挥其作用,它们都有存在的价值！ 以上是我的一点拙见,不当之处盼你指正！吴善和,2003,6,1

☆善和老师:也许您根本没有仔细看过我和萧老师的讨论,您指的同构关系,是数学上的,还是您借用的一个概念？如果是数学上的,我们必须按概念“办事”:凸函数对于加法最多是交换半群,因此根本不存在同态,更不存在同构！当然如果是您借用的一个概念,您必须给出它的严格定义,并证明几何凸函数与凸函数之间存在“同构关系”（您定义的同构）,此外还必须证明:存在“同构关系”两个‘集合’具有相似的性质,

也就是要证明:存在“同构关系”两个‘集合’,一个‘集合’具有的性质可移植到另外一个‘集合’中.这才是我们应该作的工作,而不是我们想当然的认为这个‘集合’具有的性质那个‘集合’就具有！固然直觉对数学的发展是非常重要的,但是数学最需要的是严格的推理.学术讨论归学术讨论,友谊是友谊.杨定华: 2003-06-01 08:29PM

☆用等差数列和等比数列的关系来比喻"凸函数"和"几何凸函数"的关系是不妥的!!在复数范围内,等差数列和等比数列之间是一个指数 映射！！大家一定要重视代数的重要性！类似的问题,我将不会再参加讨论.杨定华: 2003-06-01 08:48PM

☆小明老师:关于几何凸函数的问题没有必要再争论下去,每个人都有自己的价值观,每个人每天都在做自己认为有价值的事情.我们应该多讨论一些数学问题,少争论没多少价值的"价值"问题.不过,几何凸函数绝对是方法论的一个典型题材.萧振纲:2003-06-01 09:39PM

☆作学问,尤其作数学,我们不要想当然的认为这个是什么,那个就是什么!固然直觉对数学的发展是非常重要的,但是数学最需要的是严格的推理.我们小组虽然研究不等式,但我们千万不要忽视代数、分析、代数拓扑,微分拓扑、微分几何等知识,至少要有一定的了解！这些方向毕竟是现代数学的主流！学术讨论归学术讨论,友谊是友谊.杨定华: 留言人: yang_dinghua 2003-06-02 01:54PM

☆完全同意萧老师的意见!是的,我们看到正的等比数列,不能总是取对数化为等差数列,累不累？况且凸函数与几何凸函数互换之间,要换指数又换对数,自变量全要换,更累！因为我们一直没有主动去换,以致有可能已经漏掉许多不等式.对于有些（我讲的是有些）不等式,现在已经发现这条近路,应该要走下去,不能仍用老远路. 张小明: 2003-06-03 01:18PM

☆杨定华先生的魅力一文中的例 1 可用张小明文中的定理 3 得到,因而还是可以由凸函数的 Jensen 不等式得到.其实,凸函数与几何凸函数很难说那个重要,那个不重要,只是凸函数已捷足先登而已.有些不等式用凸函数容易,有些不等式用几何凸函数简单,如"魅力"一文中的例 2.所以,窃以为研究几何凸函数应主要发掘其应用,研究其不能与凸函数对应的性质.萧振纲: 2003-06-03 12:46PM

☆你的文 57,我也看了,虽然加强了,但是用几何凹函数的知识,结果更强！并且证明用的是控制,才二三步！所以我认为大家必须懂得几何凹凸性！有时一个函数既是凸函数,又是几何凸函数,用了凸函数的性质,得到了一个不等式就认为完成了,可有时再用几何凸函数,结果为更强.在适当时,我将出几何凸函数的综合文,出钱正式发表它,但是我还要讨教匡教授,国外有否类似概念？？！！张小明 2003-06-14 07:55AM

☆我再次要求在《方法与评论》栏中,开辟一栏专放几何凸函数的文章,我有三文在起草中,一文为《一些已知不等式的统一证明》《介绍几个新建的解析不等式（3）》《关于几何凸函数的几点说明》. 张小明: zjzxm888 2003-06-14 11:16AM

☆吴老师:祝贺你完成了系列文章.我的文章其实也是系列.（1）关于对数凸函数,国外已有在一维上的判别法,涉及的例题可以是 N 个参数.你文不知涉及这方面内容？（2）设法推广到 N 维,与控制不等式相联系；以前的几何凸函数文章使用范围狭窄,正是这个道理,而且所发杂志级别就高不了；当然不包括杨定华的文章,杨的文章与以前中学刊物文章相比,有二个特点,（a）例题好,（b）有了 N 维的定义（无 N 维的判别法）,所以他的文能在河北大学学报上发.我现在在理论完善几何凸函数,无较大工作.zjzxm8882003-06-28 05:21AM

☆你们在开辟另一战场吗？嗨,看着看着战役就扩大啦！要自信,不管别人是否授勋,你们都会成为主宰一方的将军.在战场上是平等的,打了胜仗才算英雄.英雄不用推选！ 朱可夫就是英雄,但从他的出身看,并没有多少当英雄的优势和理由.更不要孤独,朝下看看,检阅已经开始啦,一双双眼睛在注视着...不要愧对这种气势！留言人: zgbdsyjxz 2003-06-28 09:38AM

☆今天下午 5 点半,我有幸和杨路老师通了 10 多分钟电话,杨老师谈了对小组及小组网站的一些看法,现凭回忆整理于此,供大家参考.曲解和记得不对之处,请杨路老师指正.刘保乾

下面是杨老师在电话中谈到的内容:不等式研究小组（网站）比过去发展快了,短短时间进步很大.过去主要是做三角形,三角形应用方面很有限,不能全做这个.现在几何凸函数讨论的很热烈,几何凸函数到底是谁先提出的？不仅要和国际人物接轨,还要跟国际学术带头人一样,起到领导作用(刘保乾注:大概意思是说吸纳到我们的旗帜下）.就我看的一些资料,杨定华在这方面做的很好嘛,张小明也不借.我记得网上有人挂了一篇外文文章,其中...就是几何凸函数（刘保乾注:恕本人学识浅显,不能将有关...表述出来）,但到底

几何凸函数是谁先提出来的(刘保乾当时插了一句:张小明正在写综述).以上是通话的主要内容. 留言人: 7105775606 2003-07-09 09:31PM

☆关于几何凸函数: (1) 我在石焕南老师和杨志明老师的帮助下,我这里查到是《中学数学(湖北) 1998 年第 4 期上的定义,但此文谈几个不同凸函数,几何凸函数是其中一个,只涉及一维几何凸函数的各个定义之间的等价问题,无应用.而后的几篇发表在中学有关数学杂志的上,内容也在谈几个不同凸函数,一维几何凸函数的各个定义之间的等价问题. (2) 第一个谈几何凸函数与控制相联系的应是杨定华,他也给出 N 维几何凸函数的定义,他的例子也比较好.但他一直很想知道微分判别法,但没有成功. (3) 第四届初数会上的于小平,也研究了不同的凸函数定义,第一个给出了微分判别法,其中一个是现在几何凸函数的判别法, (笔者在不知情前提下,也得到了) .于小平猜测判别法用处很大,但后无结果.(4)笔者主要研究几何凸函数的性质,A:如相加是什么？相乘是什么？B:N 维几何凸函数的应用例子,用简单的方法证明算术平均数,不小于几何平均数等等,也简证近十个已知的不等式,C:给出 SCHUR—几何凸函数的定义及判别法,利用此法,发现二十几个笔者认为漂亮的不等式（不谈实用）.

(5) 不同的凸函数的定义很多,常见的是对数凸函数,F 里面是相加的,外面是相乘时的一个不等式.上次张志华老师在网上挂了一外国人（好象是英国人）的一文,其里面相乘,外面相加,有微分判别,不涉及 N 维,但能处理 N 个变量.他的定理用几何凸函数理论相验的话,条件可以不一样,互相不包含. (6) 几何凸函数是 F 里面相乘,F 外面也是相乘的不等式,他与常规凸函数有一样相互转换的公式(几乎所有的凸函数都有这种转换）,在以前的文献里,已查有三人在不同的证明转换过,笔者身在县城,原专业也是特殊方程,学识浅,资料少,今有杨路教授关心几何凸函数研究,非常激动.是的如果我们不与国际接轨,那是井底之蛙,为了交流,写下这些,希专家一起了解几何凸函数的来历史.

国外是否有几何凸函数的定义和理论.希各专家提供信息,大家一起了解几何凸函数的历史.另:由于本人对两个向量的相互控制的技巧不熟,所以我认为还有许多漂亮的不等式还没有发现.张小明:留言人: zjzxm888 2003-07-09 10:11PM

☆我在不等式研究通讯专辑上看到了张小明先生关于几何凸函数的研究报告 该专辑对几何凸函数的论证是别有见解,然我认为这个没有必要引入几何凸函数的概念,因为 f(x)是几何凸函数的充要条件是 lnf(expx)是凸函 数.文家金: 2003-09-21 09:52PM

☆文兄:你好 !谢谢您关注几何凸函数的研究.我有以下几点观念. (1) 引不引进几何凸函数这个概念,是个小问题.“布什”也是简称罢了,如果用全称,不觉得很累.再说也有“对数凸函数”这个概念,更应用“几何凸函数”概念.其实也不过一层纸,我们要捅破它,使人们走近路. (2) 关键是看能不能解决问题？我在 GAMMA 函数得到了新的几个不等式. (3) 由于积分定义不能平推.在积分领域内更有价值,可惜我智力已经跟不上了,大家不妨多关注几何凸函数的积分不等式. zjzxm888: 2003-09-22 06:09AM

☆我认为展开几何凸函数的研究很有必要,它为我们进行不等式研究导入了新的思维视角.不仅仅积分不等式不能平推,最近我发现一些普通的函数不等式也不能平推. 李世杰: 2003-09-22 07:57AM

☆几何凹函数的积分的上下界 (hadamard 型),至今还不清,我得到了一个弱下界,虽不满意,但没有好结果. 圆是为几何凸集的充要条件是什么？这些都看起来简单,研究起来却难.zjzxm888: 2003-09-22 11:44AM

☆有时我们不能小看平推,正数列与等差数列不就是平推一下吗 (不是我说的) ？再说有向线段平推一下,不仅仅是二条有向线段,而是一个平行四边形了,对角线等概念也相应出来了. 小明: 2003-09-22 11:49AM

☆既然几何凸函数与凸函数是两个等价概念,因而几何凸函数的所有性质均可由凸函数的性质导出.故研究凸函数的性质更有意义,因为其形式很简明.近期我们在研究凸函数中获得了一个优秀结果. 文家金: 2003-09-22 09:53PM

☆研究几何凸函数是为了获得数学研究的一个新的平台,它与凸函数不同的地方,我认为凸函数是定义在“和”的系统中的,而几何凸函数是属于“积”性系统的,尽管定义等价,但优美的结论却各呈风采,并不完全相似. 如果因为等价就不研究,会失去很多.就象连续的凸函数,它实际上与二阶导数的正与负等价.李世杰: 2003-09-23 11:22AM

☆从某种角度上看,几何凸函数将比凸函数更精彩！ (1)几何凸加几何凸为几何凸,几何凸乘几何凸为几何凸.这二个性质决定了几何凸函数比凸函数使用范围更广!! (2)理论有不能平推的地方.具体使用更不

能平推,否则会出现很多怪物！(3)从美学角度来看,两者都美.凸函数全是加,几何凸函数全是乘.zjzxm888: 2003-09-23 11:47AM

☆不赞成文兄这二句话：(1) 因而几何凸函数的所有性质均可由凸函数的性质导出. (2) 凸函数更简明. (a)几何凸函数积分的性质,如何由凸函数推得？
(b)在几何凸函数理论出来之前,以前怎么推得那些漂亮的不等式. (c)凸函数的定义与几何凸函数的定义同样简明.这个一看就明白.7106428882: 2003-09-23 11:54AM

☆我现在的看法:不可否认几何凸函数的许多理论（不是全部）是由凸函数平推过来,1 是为了方便,2 这是历史造成的,谁让凸函数先深入人心呢？ 但在使用方面,特别是发现新的不等式和已知函数新的特性方面,几何凸函数有可能独挡一面,这个现在有许多例子了.如：二个星期之前我发现一本不等式名著中的 L 函数是凹函数,又是几何凸函数,这样我把它的结果加强了.7106428882: 2003-09-23 12:14PM

☆我们说的几何凸函数与凸函数是两个等价的概念,并不意味着研究几何凸函数是无意义的,只是不宜加这个新概念.我认为称之为凸函数的应用比较妥当,请同行们参看数学通报 1993 年第 8 期“可微凸函数的又一特征”一文,凸函数里面就包含了所谓几何凸函数.文家金: 2003-09-25 11:53PM

☆我以为文的看法:“既然几何凸函数与凸函数是两个等价概念,因而几何凸函数的所有性质均可由凸函数的性质导出.故研究凸函数的性质更有意义,因为其形式很简明.近期我们在研究凸函数中获得了一个优秀结果”.是错误的,数学上的任何一个定理都是与某几条公里等价！8106429582: 2003-09-23 01:47PM

☆文家金对几何凸函数的一些看法,是许多人曾有的,许多人现在还有的.也许我、李世杰和杨定华对自已的东西有偏爱,一叶障目,欢迎象文先生这样的专家对我们提一些意见,也许使我们更清醒,少走弯路.我佩服二个人,到底我佩服正确不正确,我现在还不知.如果几何凸函数理论能对不等式研究有帮助的话,我会若干年后,说出这二个人名字 如果几何凸函数在不等式中站不住脚,那么其它领域也不可能有地位,那么我佩服得不道理了.7106428882:2003-09-23 12:02PM,

☆就目前来看,每个系统都是几条公理推导的,例如,整个不等式系统都是实代数几何的“附件”,那为什么还要发展很多理论去研究了？请文家金老师三思！yang_dinghua: 2003-09-23 01:43PM

☆对于一般函数来说,利用凸函数的性质,只能得到一个不等式；但再利用几何凸性,就有二个不等式,谁强谁弱？还不定.您说,何乐而不为呢？ 张小明: zjzxm888

[中国不等式问题]

CIQ.16 **(刘保乾提出)在△ABC 中,试证**

$$\frac{r_a}{w_a+r_a}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{r_a}{l_a+r_a}+\frac{r(r_a+l_a)}{bc}\right)\left(\geq\sin\frac{A}{2}\right)\qquad(*)$$

$$l_a=m_a,w_a,r+\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\sqrt{s(s-a)},\frac{s(s-a)}{w_a},\frac{s(s-a)}{m_a},s\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}},r+\frac{bc}{r_a+w_a}]$$

注 1: $\frac{r_a}{w_a+r_a}\geq\sin\frac{A}{2}$ **系由刘健建立.注** 2:**笔者已证** $\frac{r_a}{w_a+r_a}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{r_a(w_a-r)}{bc}+\frac{r}{w_a-r}\right)\geq\sin\frac{A}{2}$

参考文献

[1]刘保乾,不等式 CIQ.1 的评注,不等式研究通讯,2003 年第 3 期,60

不等式研究通讯

2003 年第 5 期(总第 39 期)

中国不等式研究小组主办

创刊时间：1994 年 4 月

本刊地址：福建省福州第二十四中学

联系电话：0591—3982452　　0591—3682785

邮政编码：350015

E—mail　：bdsyj@163.com　xzlbq@xinhuanet.com

本刊网址：http://zgbdsyjxz.nease.net

工 本 费：18.00

本期出版时间：2003 年 10 月 1 日